KONVERGENSI MODIFIKASI VARIAN METODE CHEBYSHEV-HALLEY MENGGUNAKAN INTERPOLASI KUADRATIK

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh:

SILVIA YUTIKA
10854002885

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU

2013

KONVERGENSI MODIFIKASI VARIAN METODE CHEBYSHEV-HALLEY MENGGUNAKAN INTERPOLASI KUADRATIK

SILVIA YUTIKA
10854002885

Tanggal Sidang : 23 Mei 2013
Tanggal Wisuda : 2013

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Varian metode Chebyshev-Halley merupakan salah satu metode iterasi dengan orde konvergensi empat untuk menentukan akar-akar persamaan nonlinier. Kecepatan sebuah metode iterasi bergantung kepada orde konvergensinya. Pada tugas akhir ini penulis memodifikasi varian metode Chebyshev-Halley menggunakan interpolasi kuadratik guna meningkatkan orde konvergensi. Berdasarkan hasil penelitian, diperoleh bahwa modifikasi Varian metode Chebyshev-Halley menghasilkan orde konvergensi tujuh yang melibatkan 3 evaluasi fungsi yaitu $f(z_n)$, $f(y_n)$, $f(x_n)$ dan 2 evaluasi fungsi turunan $f'(y_n)$, $f'(x_n)$ dengan indeks Efficiency sebesar 1.475

Katakunci: Interpolasi kuadratik, varian metode Chebyshev-Halley, orde konvergensi.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT atas segala limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dengan judul **"KONVERGENSI MODIFIKASI VARIANT METODE CHEBYSHEV-HALLEY MENGGUNAKAN INTERPOLASI KUADRATIK"**. Penulisan tugas akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di UIN Suska Riau. Shalawat beserta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, mudah-mudahan kita semua selalu mendapat syafa'at dan dalam lindungan Allah SWT amin.

Dalam penyusunan dan penyelesaian tugas akhir ini, penulis tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak, baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu, penulis mengucapkan terimakasih yang tak terhingga kepada kedua orang tua tercinta ayahanda dan ibunda yang tidak pernah lelah dalam mencurahkan kasih sayang, perhatian, do'a, dan dukungan untuk menyelesaikan tugas akhir ini. Selanjutnya ucapan terimakasih kepada :

1. Bapak Prof. Dr. H. M. Nazir Karim, M.A selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Wartono, M.Sc, selaku pembimbing yang telah banyak membantu, mengarahkan, mendukung, dan membimbing penulis dengan penuh kesabarannya dalam penulisan tugas akhir ini.
5. Bapak Mohammad Soleh, M.Sc selaku penguji I yang telah banyak membantu, memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.

6. Bapak M.Nizam Muhaijir,S.Si selaku penguji II yang telah banyak membantu, mendukung dan memberikan saran dalam penulisan tugas akhir ini.
7. Semua dosen-dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan dukungan serta saran dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
8. Teman-teman seperjuangan angkatan 2008 di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim.
9. Semua pihak yang telah memberikan dukungan kepada penulis terutama kepada kak Hari Saputra dalam proses penulisan tugas akhir ini hingga selesai yang tidak dapat penulis sebutkan namanya satu persatu.

Dalam penyusunan tugas akhir ini penulis telah berusaha semaksimal mungkin. Walaupun demikian tidak tertutup kemungkinan adanya kesalahan dan kekurangan baik dalam penulisan maupun dalam penyajian materi. Untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan tugas akhir ini.

Pekanbaru, 23 Mei 2013

Silvia Yutika

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Para Ilmuwan dibidang sains dan teknik sering dihadapkan dengan sebuah persoalan matematis yang rumit berbentuk persamaan nonlinear. Metode numerik adalah teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan operasi hitungan atau aritmatika biasa. Salah satu penerapan metode numerik dalam perhitungan aritmatika adalah mencari akar-akar persamaan nonlinier. Salah satu metode pencarian akar-akar persamaan yang sering dingunakan adalah *Metode Newton* dengan orde konvergensi berbentuk kuadratik. Oleh karena itu, metode Newton cukup cepat menghampiri akar-akar persamaan nonlinier. Bentuk umum metode newton adalah,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, 2, 3 \ldots \tag{1.1}$$

Untuk memulai iterasi pada metode Newton diperlukan sebuah tebakan awal x_0 Apabila tebakan awalnya diambil cukup dekat ke akar α, maka metode Newton akan konvergen secara kuadratik.

Peneliti telah banyak melakukan berbagai macam metode pendekatan dengan memodifikasi berbagai metode iterasi untuk meningkatkan orde konvergensi. Kecepatan konvergensi sebuah metode bergantung pada orde konvergensinya dalam meminimalkan jumlah iterasi, maka dikembangkan suatu metode numerik dengan konvergensi kubik yang dikenal metode Halley, dengan bentuk umumnya adalah :

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{L_f}{1- L_f}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{1.2}$$

dengan

$$L_f = \frac{1}{2}\frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2}.$$

Yaotang Li, Peiyuan Zhang dan Yanyan Li (2009) telah mengembangkan metode Newton dengan memodifikasi menggunakan turunan kedua yang menghasilkan orde konvergensi kubik yang dikenal metode Chebyshev-Halley dengan bentuk :

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{L_f(x_n)}{(1- \ L_f(x_n))}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{1.3}$$

dengan

$$L_f = \frac{f''(x_n)f'(x_n)}{f'(x_n)^2} \tag{1.4}$$

Kemudian Yaotang Li, Peiyuan Zhang dan Yanyan Li (2009) telah melakukan pendekatan dengan memodifikasi persamaan (1.3). Tujuan nya untuk mengaproksimasi turunan ke dua, yang disebut varian Metode Chebyshev-Halley. Hasil dari modifikasi yang telah di aprokmasikan diperoleh orde Konvergensi keempat.

Rumus varian Metode Chebyshev-Halley,

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{f(y_n)}{f(x_n) - 2\ f(y_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1.5}$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Kou Jisheng, Li Yitian dan Wang Xiuhua (2006) telah mengembangkan metode Newton dengan memodifikasi menggunakan turunan kedua yang menghasilkan orde konvergensi empat.

Wartono dan Fitriyah Rita (2012), telah mengembangan Metode King dan memodifikasinya dengan interpolasi kuadratik. Hasil modifikasi tersebut diperoleh orde konvergensi ketujuh.

Changbum Chun (2007) telah mengembangkan metode Jarrat dengan memodifikasi menggunakan interpolasi kuadratik yang menghasilkan orde konvergensi enam.

Metode Halley merupakan metode yang konvergen secara kubik atau memiliki orde konvergensi tingkat tiga dan Varian Metode Chebyshev-Halley yang memiliki orde konvergensi tingkat empat yang artinya secara teori metode Halley dan Varian Metode Chebyshev-Halley lebih cepat konvergen ke akarnya bila dibandingkan dengan metode Newton.

Oleh karena itu, pada tugas akhir ini penulis tertarik untuk melakukan penelitian dengan memodifikasi Varian Metode Chebyshev-Halley menggunakan Interpolasi Kuadratik untuk menghasilkan tingkat orde konvergensi yang tinggi.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada tugas akhir ini adalah bagaimana menentukan orde konvergensi dari modifikasi persamaan (1.5) menggunakan Interpolasi Kuadratik.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada tugas akhir ini yaitu :

1. Fungsi f adalah suatu fungsi nonlinear dengan satu variabel dan fungsinya bernilai riil.
2. Metode iterasi yang akan dimodifikasi adalah Varian Metode Chebyshev-Halley yang diberikan pada persamaan (1.5).
3. Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan perangkat lunak Matlab.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Untuk memperoleh persamaan modifikasi Varian Metode Chebyshev-Halley.
2. Untuk memperoleh orde konvergensi modifikasi Varian Metode Chebyshev-Halley menggunakan Interpolasi Kuadratik.
3. Mensimulasikan secara numerik persamaan iterasi modifikasi Varian Metode Chebyshev-Halley menggunakan Interpolasi Kuadratik.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian dari tugas akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Diperoleh metode baru setelah memodifikasi Varian Metode Chebyshev-Halley dengan menggunakan Interpolasi Kuadratik.
2. Dapat dingunakan untuk menentukan akar-akar persamaan non-linear dengan tingkat kekonvergenan lebih tinggi.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan skripsi ini mencakup lima bab yaitu :

BAB I Pendahuluan

Bab ini berisi tentang latar belakang, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat penelitian.

BAB II Landasan Teori

Bab ini berisi tentang teori-teori dasar yang digunakan dalam Tugas Akhir.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisi tentang metodologi penelitian yang digunakan dalam Tugas Akhir.

BAB IV Modifikasi Persamaan (1.5) menggunakan Interpolasi Kuadratik

Bab ini berisi tentang pembahasan bagaimana bentuk rumusan baru dari persamaan (1.5) setelah dimodifikasi menggunakan Interpolasi Kuadratik, serta bagaimana bentuk orde konvergensinya. Selain itu dilengkapi dengan simulasi numerik.

BAB V Kesimpulan dan Saran

Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran.

BAB II
LANDASAN TEORI

Beberapa teori yang dingunakan dalam penyusunan tugas akhir ini adalah :

2.1 Orde Konvergensi

Kecepatan suatu metode konvergensi merupakan suatu ukuran keefektifan suatu metode numerik. Konvergensi adalah kecenderungan untuk memiliki galat (kesalahan), yang diakibatkan oleh pemenggalan, yang mendekati nilai nol. Orde konvergensi juga merupakan suatu tingkat percepatan dalam penyelesaian persamaan nonlinear $f(x)=0$, yang merupakan gambaran dari kekonvergenan metode iterasi tersebut. Apabila suatu metode iterasi berorde dua maka metode iterasi ini akan konvergen secara kuadratik, dan apabila metode iterasi berorde tiga maka metode iterasi ini akan konvergen secara kubik, dan seterusnya. Untuk lebih jelas yang menerangkan tentang orde konvergensi adalah sebagai berikut:

Definisi 2.1 : (John H Mathews, 1992). Misalkan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ adalah barisan yang konvergen ke $\sim$, dan diberikan $e_n = x_n - \sim$ untuk $n \geq 0$. Jika terdapat $M \neq 0$ dan $p > 0$ sedemikian hingga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \sim|}{|x_n - \sim|^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = M \qquad (2.1)$$

Persamaan (2.1) dapat dikatakan $\{x_n\}$ konvergen $\sim$ dengan orde konvergensi p.

Jika $p=1$ maka $\{x_n\}$ memiliki orde konvergensi linier, jika $p=1$, maka $\{x_n\}$ memiliki orde konvergensi kuadratik, dan seterusnya. Untuk nilai n yang besar maka persamaan (2.1) menjadi

$$\frac{|x_{n+1} - \sim|}{|x_n - \sim|^p} \approx M$$

sehingga,

$$|x_{n+1} - \sim| \approx M |x_n - \sim|^p$$

Apabila notasi $e_n = x_n - \sim$ merupakan notasi untuk nilai tingkat kesalahan pada iterasi ke-n, pada suatu metode yang menghasilkan suatu barisan $\{x_n\}$, maka suatu persamaan

$$e_{n+1} = Ce_n^p + O(e_n^{p+1}), \tag{2.2}$$

dapat disebut sebagai persamaan tingkat kesalahan, sedangkan nilai p pada persamaan (2.2) menunjukkan orde konvergensinya.

Contoh 2.1 : (John H Mathews, 1992). Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = x^3 - 3x + 2$ dengan nilai awal $p_0 = -2{,}4$, dan akar $\sim = -2$ memiliki orde konvergensi kuadratik jika dengan menggunakan metode Newton.

Jawab:

Diketahui metode Newton memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Untuk itu, dengan mengambil $p = 2$ yang menunjukkan bahwa orde konvergensi pada $\{x_n\}$ adalah kuadratik, sehingga diperoleh:

Tabel 2.1. Konvergensi Kuadratik Metode Newton pada Akar Sederhana

K	x_n	$x_{n+1} - x_n$	$e_n = x_n - \sim$	$\frac{\lvert e_{n+1}\rvert}{\lvert e_n\rvert^2}$
0	-2,400000000	0,323809524	0,400000000	0,476190475
1	-2,076190476	0,072594465	0,076190476	0,619469086
2	-2,003596011	0,003587422	0,003596011	0,664202613
3	-2,000008589	0,000008589	0,000008589	
4	-2,000000000	0,000000000	0,000000000	

kemudian

$$|x_{n+1} - \sim| \approx M|x_n - \sim|^p$$

Berdasarkan Teorema *Convergence Rate for Newton-Raphson Iteration* (Mathews, John. H, 1992) bahwa:

$$|e_{n+1}| \approx \frac{|f''(\sim)|}{|f'(\sim)|}|e_n|^2$$

sehingga

$$M = \frac{1}{2}\frac{|f''(-2)|}{|f'(-2)|} = \frac{1}{2}\frac{|-12|}{|9|} = \frac{2}{3}$$

kemudian diperoleh:

$$|x_3 - \sim| = 0{,}000008589 \text{ dan } |x_2 - \sim| = |0{,}003596011|^2 = 0{,}0000012931$$

maka,

$$|x_3 - \sim| = 0{,}000008589 = \frac{3}{2}|x_3 - \sim|^2$$

Maka terbukti bahwa fungsi $f(x) = x^3 - 3x + 2$ memiliki orde konvergensi kuadratik.

Berikut definisi 2.1 dan 2.2 yang menjelaskan tentang keefektifan persamaan orde konvergensi dalam menyelesaikan persamaan nonlinear untuk menghampiri akar-akar persamaannya.

Definisi 2.2 ***Efficiency Index*** **(Manoj Kumar Singh, 2009).** Index efisiensi merupakan definisi yang sederhana, yaitu

$$I = P^{\frac{1}{m}} \tag{2.3}$$

Dimana P adalah banyaknya orde dari sebuah metode, sedangkan m merupakan jumlah dari evaluasi fungsi dari metode tersbut termasuk juga fungsi turunannya. Semakin besar nilai indexnya maka metode itu semakin efektif dalam menyelesaikan persamaan nonlinier.

Contoh 2.2. Tentukanlah nilai indeks dari metode Newton dan Varian metode Chebyshev-Halley?

Jawab:

Oleh karena metode Newton hanya mempunyai dua fungsi $f(x_n)$ dan $f'(x_n)$, sedangkan orde konvergensinya dua, yaitu

$$e_{n+1} = C_2 e_n^2 + O(e_n^3)$$

maka nilai indeksnya adalah:

$$I = P^{\frac{1}{m}} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2}$$

$$= 1{,}414$$

Sedangkan varian Metode Chebyshev-halley mempunyai tiga fungsi yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$, $f(y_n)$

$$e_{n+1} = (c_2 c_3 - 2c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5)$$

maka nilai indexnya adalah:

$$I = P^{\frac{1}{m}} = 4^{\frac{1}{3}}$$

$$= \sqrt[3]{4}$$

$$= 1{,}5874$$

Oleh karena nilai indeks Varian Metode Chebyshev-Halley lebih besar dibandingkan dengan metode Newton, maka Varian Metode Chebyshev-Halley lebih efektif dalam menyelesaikan persamaan nonlinear.

Selanjutnya untuk menegaskan tingkat orde konvergensi suatu metode iterasi, perlu dilakukan perbandingan terhadap hampiran akar-akar dari sebuah fungsi *f*. Salah satu metode yang digunakan untuk penegasan itu dikenal dengan istilah *Computational Order of Convergence* (COC). Berikut ini diberikan definisi tentang COC.

Definisi 2.3 ***Computational Order of Convergence*** **(Weerakoon, 2000)**. Diberikan $\sim$ adalah akar dari $f(x)$, dan andaikan x_{n+1}, x_n dan x_{n-1} berturut-turut alalah iterasi yang dekat dengan $\sim$, maka, *Computational Order of Convergence* (COC) yang dinotasikann dengan $\circ$ dapat diaproksimasikan dengan menggunakan rumus

$$\circ \approx \frac{\ln\left|(x_{n+1} - \sim)/(x_n - \sim)\right|}{\ln\left|(x_n - \sim)/(x_{n-1} - \sim)\right|} \tag{2.4}$$

Oleh karena $x_{n+1} - \sim = e_{n+1}$, maka persamaan (2.3) dapat ditulis kembali menjadi

$$\circ \approx \frac{\ln\left|(e_{n+1})/(e_n)\right|}{\ln\left|(e_n)/(e_{n-1})\right|} \tag{2.5}$$

2.2 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan deret berbentuk polinomial. Koefisien polinomial tersebut tergantung pada turunan fungsi pada titik yang bersangkutan. Teorema ini juga memberikan estimasi besarnya galat dari pendekatan itu. Berikut ini diberikan teorema tentang Deret Taylor.

Teorema 2.1 : **(Edwin J. Purcell, 2004)** Diberikan *f* fungsi yang di mana turunan ke-$(n+1)$-nya ada untuk setiap x pada selang terbuka I yang mengandung a. Jadi untuk setiap x di dalam I,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^{(2)} + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^{(3)} + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{(n)} + R_{(n)}(x) \qquad (2.6)$$

dengan

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad (2.7)$$

adalah suku sisa dalam rumus Taylor dan c adalah titik di antara x dan a.

Persamaan (2.7) merupakan galat dari persamaan Taylor. Oleh karena itu, jika $P_n(x)$ adalah persamaan Taylor, maka

$$P(x) = f(a) + f^{'}(a)(x-a) + \frac{f^{''}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{'''}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a) + R_n(x) \qquad (2.8)$$

dan persamaan (2.6) dapat ditulis lagi dalam bentuk

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \qquad (2.9)$$

Bukti: Misalkan sebuah polinomial berderajat *n* dengan fungsi *f* pada selang terbuka *I*. Maka untuk setiap $x \in I$ berlaku

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + b_3(x-a)^3 + \cdots + b_n(x-a)^n$$

$$f(x) = \sum_{n}^{\infty} b_n(x-a)^n \qquad (2.10)$$

Jika persamaan (2.10) diturunkan secara berurutan mulai dari $f'(x)$ sampai $f^{(n)}(x)$ maka

$$
\begin{aligned}
f^{'}(x) &= b_1 + 2b_2(x-a) + 3b_3(x-a)^2 + 4b_4(x-a)^3 + \cdots + b_n n(x-a)^{n-1} \\
f^{''}(x) &= 2b_2 + 2\cdot 3b_3(x-a) + 2\cdot 3\cdot 4b_3(x-a)^2 + \cdots + b_n n(n-1)(x-a)^{n-2} \\
f^{'''}(x) &= 2\cdot 3b_3 + 2\cdot 3\cdot 4b_4(x-a) + \cdots + b_n n(n-1)(n-2)(x-a)^{n-3} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= b_n n!
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Subtitusikan $x = a$ ke persamaan (2.11) maka

$$
\begin{aligned}
f(a) &= b_0 \\
f^{'}(a) &= b_1 \\
f^{''}(a) &= 2b_2 \\
f^{'''}(a) &= 2\cdot 3b_3 \\
f^{(4)}(a) &= 2.3.4b_4 \\
&\vdots \\
f^{(n)}(a) &= b_n n!
\end{aligned}
$$

Sehingga

$$b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{2.12}$$

Oleh karena itu, jika persamaan (2.12) disubtitusikan ke dalam persamaan (2.10) maka

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Selanjutnya dapat dapat diurai menjadi persamaan (2.8) yang disebut dengan *Deret Taylor*. Kemudian untuk membuktikan galatnya, definisikan fungsi $R_n(x)$ dihimpunan terbuka *I* dengan

$$R_{(n)}(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^{(2)} - \cdots - \frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Kemudian misalkan x dan a konstanta, dan definisikan fungsi baru g pada himpunan terbuka I dengan

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f^{(2)}(t)(x-t)^{(2)}}{2!} - \frac{f^{(3)}(t)}{3!}(x-t)^{(3)} - \cdots$$

$$- \frac{f^{n}(t)(x-t)^{n}}{n!} - R_n(x)\frac{(x-t)^n}{(x-a)^n}$$

Jika disubtitusikan $t = x$ jelaslah bahwa $g(x) = 0$, dan

$$g(a) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f^{(2)}(a)(x-a)^{(2)}}{2!} - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$

$$- R_n(x)\frac{(x-a)^n}{(x-a)^n}$$

$$= R_n(x) - R_n(x)$$

$$= 0$$

Karena x dan a adalah titik pada himpunan terbuka I yang menyebabkan $g(x) = g(a) = 0$ maka kita dapat menerapkan Teorema Nilai Rata-rata untuk Turunan. Untuk itu, terdapat sebuah bilangan real c di antara x dan a sedemikian rupa sehingga $g^{'}(c) = 0$. Selanjutnya dengan menerapkan aturan perkalian dengan berulang kali, diperoleh turunan $g(t)$ dengan bentuk:

$$g^{'}(t) = 0 - f^{'}(t) - [f'(t)(-1) + (x-t)f''(t)] - \frac{1}{2!}[f^{''}(t)2(x-t)(-1) + (x-t)^2$$

$$f'''(t)] - \cdots - \frac{1}{n!}[f^{n}(t)(x-t)^{n-1}(-1) + (x-t)^n f^{(n+1)}(t)]$$

$$- R_n(x)\frac{(n+1)(x-t)^n)(-1)}{(x-a)^{n+1}}$$

$$= -\frac{1}{2!}[(x-t)^n f^{n+1}(t)] - (n+1)R_n(x)\frac{(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}} \qquad (2.13)$$

Jadi, berdasarkan teorema nilai rata-rata untuk turunan, terdapat suatu nilai c di antara x dan a sedemikian sehingga,

$$0 = g'(c) = -\frac{1}{n!}[(x-c)^n f^{n+1}(c)] + (n+1)R_n(x)\frac{(x-c)^n}{(x-a)^{n+1}}$$

Kemudian diperoleh

$$\frac{1}{n!}[(x-c)^n\ f^{\,n+1}(c)] = (n+1)R_n(x)\,\frac{(x-c)^n}{(x-a)^{n+1}}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{\,n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Sehingga, persamaan (2.7) terbukti.

Contoh 2.3 : Ubahlah $f(x)=2x^3-6x^2+11x-6$ menurut deret Taylor kedalam pangkat $x_0=1$

Jawab :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^{(2)} + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$f(x)=2x^3-6x^2+11x-6$	$f(1)=2x^3-6x_2+11x-6=1$
$f^{'}(x)=6x^2-12x+11$	$f^{'}(1)=6x^2-12x+11=5$
$f^{''}(x)=12x-12$	$f^{''}(1)=12x-12=0$
$f^{'''}(x)=12$	$f^{'''}(1)=12$

Jadi $\quad f(x)=2x^3-6x^2+11x-6$

$$=1+5(x-1)+12(x-1)^3$$

2.3 Metode Newton dan Orde Konvergensinya

Metode Newton berasal dari turunan deret Taylor Orde 1. Metode ini merupakan salah satu metode klasik yang sering digunakan untuk mencari akar-akar persamaan nonlinier. Misalkan fungsi *f* dapat diekspansi di sekitar $x=x_n$ menggunakan deret Taylor dengan x_n pendekatan $f(x)=0$, jika *f*(*x*) diekspansi di sekitar $x=x_n$ sampai orde pertama, maka diperoleh

$$f(x) = f(x_n) + (x-x_n)f'(x_n) \tag{2.14}$$

Karena $f(x)=0$, selanjutnya distribusikan ke persamaan (2.14) dengan mengambil $x=x_{n+1}$ sehingga

$$0 = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n) f'(x_n)$$

$$(x_{n+1} - x_n) f'(x_n) = - f(x_n)$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0,1,2,3,..... \tag{2.15}$$

Persamaan (2.15) merupakan persamaan metode Newton.

Teorema 2.2 : Misalkan $f(x)$ adalah fungsi bernilai riil yang mempunyai turunan pertama, kedua dan ketiga pada interval (a,b). Jika $f(x)$ mempunyai akar $\sim$ pada interval (a,b) dan x_0 adalah nilai tebakan awal yang mendekati akar $\sim$, maka persamaan (2.15) memiliki orde konvergensi tingkat dua dengan persamaan error

$$e_n = x_n - \sim$$

dengan $C_j = \dfrac{1}{j!} \dfrac{f^{(j)}(\sim)}{f'(\sim)} \quad j = 1,2,3,\cdots$

Bukti: Misalkan $\sim$ adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\sim) = 0$. Asumsikan $f'(x) \neq 0$ dan $x_n = \sim + e_n$. Selanjutnya dengan menggunkan rumus ekspansi Taylor untuk mengaproksimasi fungsi f di sekitar $\sim$, diperoleh

$$f(x_n) = f(\sim + e_n)$$

$$f(x_n) = f(\sim) + f'(\sim)(x_n - \sim) + \frac{f''(\sim)}{2!}(x_n - \sim)^2 + \frac{f''(\sim)}{3!}(x_n - \sim)^3 + O(e_n^4)$$

Oleh karena $x_n = \sim + e$, maka diperoleh

$$f(x_n) = f(\sim) + f'(\sim)e_n + \frac{1}{2!} f''(\sim)e_n^2 + \frac{1}{3!} f'''(\sim)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{2.16}$$

Karena $f(\sim) = 0$, maka dengan melakukan manipulasi aljabar pada persamaan (2.16) diperoleh

$$f(x_n) = f'(\sim)\left(e_n + \frac{1}{2!}\frac{f''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)} + \frac{1}{3!}\frac{f'''(\sim)e_n^3}{f'(\sim)} + \frac{O(e_n^4)}{f'(\sim)} \right)$$

$$= f'(\sim)\left(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right) \tag{2.17}$$

Jika untuk $f'(x_n)$ dilakukan ekspansi Taylor di sekitar $\sim$ maka

$$f'(x_n) = f(\sim + e_n)$$

$$= f'(\sim) + f''(\sim)(x_n - \sim) + \frac{f'''(\sim)}{2!}(x_n - \sim)^2 + \frac{f^{(4)}\sim)}{3!}(x_n - \sim)^3 + O(e_n^4)$$

Oleh karena $x_n = \sim + e$, maka diperoleh

$$= f'(\sim) + f''(\sim)e_n + \frac{1}{2!}f'''(\sim)e_n^2 + \frac{1}{3!}f^{(4)}(\sim)e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= f'(\sim)\left(1 + \frac{f''(\sim)e_n}{f'(\sim)} + \frac{1}{2!}\frac{f'''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)} + \frac{1}{3!}\frac{f^{(4)}(\sim)e_n^3}{f'(\sim)} + \frac{O(e_n^4)}{f'(\sim)}\right)$$

$$= f'(\sim)\left(1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right) \tag{2.18}$$

Selanjutnya dilakukan pembagian persamaan (2.17) oleh persamaan (2.18)

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\sim)\left(e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)\right)}{f'(\sim)\left(1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right)}$$

$$= \frac{\left(e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)\right)}{\left(1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right)}$$

$$= \left(e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times (1 - \left(2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right)$$

$$+ \left(2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right)^2 - \ldots$$

$$= \left(e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times \left(1 - \left(2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right) + \left(4C_2^2e_n^2 + \ldots\right)\right)$$

$$= e_n - C_2e_n^2 + O(e_n^3) \tag{2.19}$$

Kemudian dengan mensubtitusikan persamaan (2.19) ke persamaan Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - (e_nC_2e_n^2 + O(e_n^3))$$

Oleh karena $x_n = e_n + \sim$ maka $x_{n+1} = e_{n+1} + \sim$, sehingga diperoleh,

$$e_{n+1} + \sim = e_n + \sim - (e_n + C_2e_n^2 + O(e_n^3))$$

$$e_{n+1} = C_2e_n^2 + O(e_n^3) \tag{2.20}$$

Berdasarkan Teorema 2.2, metode Newton memiliki orde konvergensi kuadratik.

2.4 Metode Halley dan Orde Konvergensinya

2.4.1 Metode Chebyshev-Halley

Definisi 2.3 : (Yaotang Li, Peiyuan Zhang, 2009) Metode Chebyshev-Halley menghasilkan orde konvergensi tingkat tiga.

Pandang persamaan metode Chebyshev-Halley sebagai berikut :

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{L_f(x_n)}{(1- L_f(x_n))}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{1.3}$$

Metode Chebyshev-Halley mempunyai dua fungsi yaitu $f(x_n)$ dan $f'(x_n)$ untuk persamaan (1.3).

dengan

$$L_f = \frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2}. \tag{1.4}$$

Dan untuk persamaan (1.4) mempunyai tiga fungsi yaitu $f''(x_n)$, $f(x_n)$ dan $f'(x_n)^2$.

Berikut ini akan membahas mengenai error metode Chebyshev-Halley yang menunjukkan orde konvergensinya.

Teorema 2.3: Misalkan $f(x)$ adalah fungsi yang berniali riil yang memiliki turunan pertama, kedua dan ketiga pada interval *(a,b)*. Jika $f(x)$ memiliki akar $\sim$ pada *(a,b)* dan x_0 adalah nilai tebakan awal yang cukup dekat dengan $\sim$, maka metode iterasi pada persamaan (2.1) memenuhi persamaan error dengan

$$e_n = x_n - \sim$$

Misalkan $\sim$ adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\sim) = 0$. Asumsikan bahwa $f'(x) \neq 0$ dan $x_n = \sim + e_n$. Seterusnya dengan menggunakan ekspansi Taylor diperoleh

$$f(x_n) = f(\sim + e_n)$$

$$f(x_n) = f(\sim) + f'(\sim)(x_n - \sim) + \frac{f''(\sim)}{2!}(x_n - \sim)^2 + \frac{f''(\sim)}{3!}(x_n - \sim)^3 + O(e_n^4)$$

Oleh karena $x_n = \sim + e$, maka diperoleh

$$f(x_n) = f(\sim) + f'(\sim)e_n + \frac{1}{2!}f''(\sim)e_n^2 + \frac{1}{3!}f'''(\sim)e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (2.21)$$

Karena $f(\sim) = 0$, maka dengan melekukan manipulasi aljabar pada persamaan (2.21) diperoleh

$$f(x_n) = f'(\sim)\left(e_n + \frac{1}{2!}\frac{f''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)} + \frac{1}{3!}\frac{f'''(\sim)e_n^3}{f'(\sim)} + O(e_n^4) \right) \qquad (2.22)$$

dengan $C_j = \frac{1}{j!}\frac{f^{(j)}(\sim)}{f'(\sim)}$, dengan $j = 1,2,3,\cdots$, maka persamaan (2.22) menjadi

$$f(x_n) = f'(\sim)\left(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right) \qquad (2.23)$$

Jika untuk $f'(x_n)$ dilakukan ekspansi Taylor di sekitar $\sim$ maka

$$f'(x_n) = f(\sim + e_n)$$

$$= f'(\sim) + f''(\sim)(x_n - \sim) + \frac{f'''(\sim)}{2!}(x_n - \sim)^2 + \frac{f^{(4)}\sim)}{3!}(x_n - \sim)^3 + O(e_n^4)$$

Oleh karena $x_n = \sim + e$, maka diperoleh

$$= f'(\sim) + f''(\sim)e_n + \frac{1}{2!}f'''(\sim)e_n^2 + \frac{1}{3!}f^{(4)}(\sim)e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= f'(\sim)\left(1 + \frac{f''(\sim)e_n}{f'(\sim)} + \frac{1}{2!}\frac{f'''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)} + \frac{1}{3!}\frac{f^{(4)}(\sim)e_n^3}{f'(\sim)} + \frac{O(e_n^4)}{f'(\sim)} \right)$$

$$= f'(\sim)\left(1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right) \qquad (2.24)$$

Jika untuk $f''(x_n)$ dilakukan ekspansi Taylor di sekitar $\sim$ maka

$$f''(x_n) = f''(\sim + e_n)$$

$$= f''(\sim) + f'''(\sim)e_n + \frac{1}{2!}f^{(4)}(\sim)e_n^2 + O(e_n^3)$$

$$= f'(\sim)\left(\frac{f''(\sim)}{f'(\sim)} + \frac{f'''(\sim)e_n}{f'(\sim)} + \frac{1}{2!}\frac{f^{(4)}(\sim)e_n^2}{f'(\sim)} + \frac{O(e_n^3)}{f'(\sim)} \right)$$

$$= f'(\sim)\left(2\frac{1}{2!}\frac{f''(\sim)}{f'(\sim)} + 6\frac{1}{3!}\frac{f'''(\sim)e_n}{f'(\sim)} + 12\frac{1}{4!}\frac{f^{(4)}(\sim)e_n^2}{f'(\sim)} + O(e_n^3) \right)$$

$$= f'(\sim)\left(2C_2 + 6C_3e_n + 12C_4e_n^2 + O(e_n^3\right) \tag{2.25}$$

Jika persamaan (2.23) dibagi dengan persamaan (2.24) diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\sim)(e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4))}{f'(\sim)(1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3))}$$

$$= \frac{e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)}{1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)}$$

$$= \left(e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times \left(1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right)$$

$$= \left(e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times$$

$$\left(1 - \left(2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right) + \left((2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right)^2 - \ldots\right)$$

$$= \left(e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times$$

$$\left(1 - \left(2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right) + \left(4C_2^2e_n^2 + \ldots\right)\right)$$

$$= \left(e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times \left(1 - 2C_2e_n + (4C_2^2 - 3C_3)e_n^2 + O(e_n^3)\right)$$

$$= e_n - C_2e_n^2 + (2C_2^2 - 2C_3)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{2.26}$$

Kemudian jika pada persamaan (2.25) dikali dengan persamaan (2.23) diperoleh

$$f''(x_n)f(x_n) = \left(f'(\sim)\left(2C_2 + 6C_3e_n + O(e_n^2)\right)\right) \times \left(f'(\sim)\left(e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)\right)\right)$$

$$= f'(\sim)^2\left(2C_2e_n + (2C_2^2 + 6C_3)e_n^2 + 8C_2C_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) \tag{2.27}$$

Jika persamaan (2.24) dikuadratkan maka diperoleh

$$f'(x_n)^2 = \left(f'(\sim)\left(1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right)\right)^2$$

$$= f'(\sim)^2\left(1 + 4C_2e_n + (6C_3 + 4C_2^2)e_n^2 + 12\mathrm{C}_2C_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) \tag{2.28}$$

Jika persamaan (2.27) dibagi dengan persamaan (2.28) diperoleh

$$\frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2} = \frac{f'(\sim)^2\left(2C_2e_n + (2C_2^2 + 6C_3)e_n^2 + 8C_2C_3e_n^3 + O(e_n^4)\right)}{f'(\sim)^2\left(1 + 4C_2e_n + (6C_3 + 4C_2^2)e_n^2 + 12\mathrm{C}_2C_3e_n^3 + O(e_n^4)\right)}$$

$$= \frac{\left(2C_2e_n + (2C_2^2 + 6C_3)e_n^2 + 8C_2C_3e_n^3 + O(e_n^4)\right)}{\left(1 + 4C_2e_n + (6C_3 + 4C_2^2)e_n^2 + 12\mathrm{C}_2C_3e_n^3 + O(e_n^4)\right)}$$

$$= \left(2C_2e_n + (2C_2^2 + 6C_3)e_n^2 + 8C_2C_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) \quad \text{X}$$

$$\left(1 + 4C_2e_n + (6C_3 + 4C_2^2)e_n^2 + 12\mathrm{C}_2C_3e_n^3 + O(e_n^4)\right)^{-1}$$

$$=\left(2C_2e_n+(2C_2^2+6C_3)e_n^2+8C_2C_3e_n^3+O(e_n^4)\right) \text{X}$$

$$\left(1-\left(4C_2e_n+(6C_3+4C_2^2)e_n^2+12\mathrm{C}_2C_3e_n^3+O(e_n^4)\right)+\right.$$

$$\left.\left(4C_2e_n+(6C_3+4C_2^2)e_n^2+12\mathrm{C}_2C_3e_n^3+O(e_n^4)\right)^2-...\right)$$

$$=2C_2e_n+(6C_3-6C_2^2)e_n^2+(-28C_2C_3+16C_2^3)e_n^3+O(e_n^4) \qquad (2.29)$$

Jadi

$$L_f=2C_2e_n+(6C_3-6C_2^2)e_n^2+(-28C_2C_3+16C_2^3)e_n^3+O(e_n^4)$$

kemudian,

$$1- \quad L_f=1-\sim(2C_2e_n+(6C_3-6C_2^2)e_n^2+(-28C_2C_3+16C_2^3)e_n^3+O(e_n^4))$$

$$=-\sim(2C_2e_n+(6C_3-6C_2^2)e_n^2+(-28C_2C_3+16C_2^3)e_n^3+O(e_n^4))$$

maka diperoleh,

$$\frac{L_f}{1- \quad L_f}=\frac{2C_2e_n+(6C_3-6C_2^2)e_n^2+(-28C_2C_3+16C_2^3)e_n^3+O(e_n^4)}{- \quad (2C_2e_n+(6C_3-6C_2^2)e_n^2+(-28C_2C_3+16C_2^3)e_n^3+O(e_n^4))}$$

$$=1+ \quad (2C_2e_n+(6C_3-6C_2^2)e_n^2+(-28C_2C_3+16C_2^3)e_n^3+O(e_n^4))+$$

$$^2(2C_2e_n+(6C_3-6C_2^2)e_n^2+(-28C_2C_3+16C_2^3)e_n^3+O(e_n^4))^2+O(e_n^4)$$

$$= \quad ^2O(e_n^4)^2+(\quad ^2(-5C_2C_3+32C_2^3)e_n^3+ \quad ^2(-12C_2^2+12C_3)e_n^2+$$

$$4 \quad ^2C_2e_n+ \quad +1)O(e_n^4)+1+ \quad ^2(-28C_2C_3+16C_2^3)^2e_n^6$$

$$2 \quad ^2(-6C_2^2+6C_3)(-28C_2C_3+16C_2^3)e_n^5+ \quad ^2(4C_2(-28C_2C_3+16C_2^3)$$

$$+(-6C_2^2+6C_3)^2)e_n^4+(\quad (-28C_2C_3+16C_2^3)+4 \quad ^2C_2(-6C_2^2+6C_3))e_n^3$$

$$+(\quad (-6C_2^2+6C_3)+4 \quad ^2C_2^2)e_n^2+2 \quad C_2e_n$$

$$=1+2 \quad C_2e_n+(\quad (-6C_2^2+6C_3)+4 \quad ^2C_2^2)e_n^2+$$

$$4 \quad ^2C_2(-6C_2^2+6C_3)e_n^3+O(e_n^4) \qquad (2.30)$$

jika persamaan (2.29) 4dikalikan dengan persamaan (2.30), maka

$$\frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2}\times\frac{L_f}{1- \quad L_f}=(2C_2e_n+(6C_3-6C_2^2)e_n^2+(-28C_2C_3+16C_2^3)e_n^3+O(e_n^4))\times$$

$$(1+2 \quad C_2e_n+(\quad (-6C_2^2+6C_3)+4 \quad ^2C_2^2)e_n^2+$$

$$4 \quad ^2C_2(-6C_2^2+6C_3)e_n^3+O(e_n^4))$$

$$= (1 + 2\ \ C_2 e_n + (\ \ (-6C_2^2 + 6C_3) + 4\ \ ^2 C_2^2) e_n^2 + 4\ \ ^2 C_2 (-6C_2^2 + 6C_3) e_n^3$$
$$+ O(e_n)^4) O(e_n^4) + ((-28C_2C_3 + 16C_2^3) e_n^3 + (-6C_2^2 + 6C_3) e_n^2 +$$
$$2C_2 e_n) O(e_n^4) + 4(-28C_2C_3 + 16C_2^3)\ \ ^2 C_2 (-6C_2^2 + 6C_3) e_n^6 +$$
$$(4(-6C_2^2 + 6C_3)\ \ ^2 C_2 (-6C_2^2 + 6C_3) + (-28C_2C_3 + 16C_2^3)$$
$$(\ \ (-6C_2^2 + 6C_3) + 4\ \ ^2 C_2^2)) e_n^5 + (8\ \ ^2 C_2 (-6C_2^2 + 6C_3) C_2 +$$
$$(-6C_2^2 + 6C_3)(\ \ (-6C_2^2 + 6C_3) + 4\ \ ^2 C_2^2) + 2(-28C_2C_3 + 16C_2^3)$$
$$C_2) e_n^4 + (2(\ \ (-6C_2^2 + 6C_3) + 4\ \ ^2 C_2^2) C_2 + 2(-6C_2^2 + 6C_3)$$
$$C_2 - 28C_2C_3 + 16C_2^3) e_n^3 + (4\ \ C_2^2 - 6C_2^2 + 6C_3) e_n^2 + 2C_2 e_2$$

$$= 2C_2 e_n + (4\ \ C_2^2 - 6C_2^2 + 6C_3) e_n^2 + (2(\ \ (-6C_2^2 + 6C_3) + 4\ \ ^2$$
$$C_2^2) C_2 + 2(-6C_2^2 + 6C_3) \sim C_2 - 28C_2C_3 + 16C_2^3) e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (2.31)$$

$$\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\ \ L_f}{1 - \ \ L_f}\right) = (1 + \frac{1}{2}(1 + 2\ \ C_2 e_n + (\ \ (-6C_2^2 + 6C_3) + 4\ \ ^2 C_2^2) e_n^2 +$$
$$4\ \ ^2 C_2 (-6C_2^2 + 6C_3) e_n^3 + O(e_n^4)$$
$$= \frac{1}{2} O(e_n^4) + 1 + ((\ \ (-6C_2^2 + 6C_3) + 4\ \ ^2 C_2^2) C_2 + (-6C_2^2 + 6C_3)$$
$$C_2 - 14C_2C_3 + 8C_2^3) e_n^3 + (2\ \ C_2^2 - 3C_2^2 + 3C_3) e_n^2 + C_2 e_n \qquad (2.32)$$

$$\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\ \ L_f}{1 - \ \ L_f}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = (\frac{1}{2} O(e_n^4) + 1 + ((\ \ (-6C_2^2 + 6C_3) + 4\ \ ^2 C_2^2) C_2 + (-6C_2^2 + 6C_3)$$
$$C_2 - 14C_2C_3 + 8C_2^3) e_n^3 + (2\ \ C_2^2 - 3C_2^2 + 3C_3) e_n^2 + C_2 e_n)$$
$$\text{X}\ (e_n - C_2 e_n^2 + (2C_2^2 - 2C_3) e_n^3 + O(e_n^4))$$
$$= e_n - C_3 + 2C_2^2 - 2\ \ C_2^2) e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (2.33)$$

sehingga,

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\ \ L_f}{1 - \ \ L_f}\right)\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)$$
$$= x_n - \left(e_n - C_3 + 2C_2^2 - 2\ \ C_2^2) e_n^3 + O(e_n^4)\right)$$
$$e_{n+1} + \sim = e_n + \sim - (e_n - C_3 + 2C_2^2 - 2\ \ C_2^2) e_n^3 + O(e_n^4))$$
$$e_{n+1} + \sim = e_n + \sim - e_n + C_3 - 2C_2^2 + 2\ \ C_2^2) e_n^3 - O(e_n^4)$$
$$e_{n+1} + \sim = \sim - (C_3 - 2C_2^2 + 2\ \ C_2^2) e_n^3 - O(e_n^4) \qquad (2.34)$$

jika ruas kiri dan ruas kanan pada persamaan (2.34) di kurangkan dengan α, diperoleh,

$$e_{n+1} = -(C_3 - 2C_2^2 + 2 \quad C_2^2)e_n^3 - O(e_n^4)$$

$$e_{n+1} = (-C_3 + 2C_2^2 - 2 \quad C_2^2)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{2.35}$$

2.4.2 Varian Metode Chebyshev-Halley

Pada persamaan (1.3) dapat dibentuk menjadi lebih sederhana dengan mengekspansi turunan kedua. Hal ini dilakukan oleh Yaotang Li, Peiyuan Zhang (2009) dengan bentuk awalnya adalah :

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{L_f}{1 - \quad L_f}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

dengan

$$L_f = \frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2}.$$

Misalkan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.36}$$

Exspansi $f(y_n)$ di sekitar $x = x_n$ dengan menggunakan teorema Taylor, diperoleh

$$f(y_n) \approx f(x_n) + f'(x_n)(y_n - x_n) + \frac{f''(x_n)(y_n - x_n)^2}{2} \tag{2.37}$$

substitusikan persamaan (2.36) ke persamaan (2.37), sehingga diperoleh,

$$f(y_n) \approx f(x_n) - f(x_n) + \left(\frac{f''(x_n)\dfrac{f(x_n)^2}{f'(x_n)^2}}{2}\right)$$

$$f(y_n) \approx \frac{f''(x_n)f(x_n)^2}{2f'(x_n)^2} \tag{2.38}$$

kemudian kalikan kedua ruas persamaan (2.38) dengan $2f'(x_n)^2$, maka

$$2f'(x_n)^2 f(y_n) \approx f''(x_n)f(x_n)^2 \tag{2.39}$$

selanjutnya, kedua ruas pada persamaan (2.39) dikalikan dengan $\dfrac{1}{f(x_n)^2}$ diperoleh

$$f''(x_n) \approx \frac{2f'(x_n)^2 f(y_n)}{f(x_n)^2} \tag{2.40}$$

substitussikan persamaan (2.40) ke persamaan (1.4), sehingga diperoleh

$$L_f = \frac{\dfrac{2f'(x_n)^2 f(y_n)}{f(x_n)^2} f(x_n)}{f'(x_n)^2}$$

$$= \frac{2f(y_n)}{f(x_n)} \tag{2.41}$$

Substitusikan persamaan (2.41) ke persamaan (1.3) dan diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{L_f(x_n)}{(1 - L_f(x_n))}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\dfrac{2f(y_n)}{f(x_n)}}{1 - \left(\dfrac{2f(y_n)}{f(x_n)}\right)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.42}$$

Dengan menggunakan aljabar, persasamaa (2.42) dapat disederhanakn menjadi

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{f(y_n)}{f(x_n) - 2\ f(y_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.43}$$

Persamaan (2.43) merupakan persamaan modifikasi varian metode Chebyshev-Halley.

Berikut ini juga akan dibahas mengenai error dari modifikasi Varian Metode Chebyshev-Halley yang menunjukkan orde konvergensinya.

Teorema 2.4 : (Yaotang Li, Peiyuan Zang, 2009) Misalkan $f(x)$ adalah fungsi bernilai rill yang mempunyai turunan di $f : I \to R$, untuk I interval terbuka. Jika x_0 menghampiri ~ maka persamaan di atas mempunyai orde konvergensi tingkat empat dengan persamaan error

$$e_{n+1} = (2c_2^3 - c_2c_3)e_n{}^4 + O(e_n{}^5)$$

Misalkan

$$A=0, B=1, C=1, D=-2$$

dimana $e_n = x_n - \sim$ dan $c_j = \frac{1}{j!}\frac{f^{(j)}(\sim)}{f'(\sim)}$

Bukti: Misalkan $\sim$ adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\sim)=0$. Asumsikan $f'(x)=0$ dan $x_n = \sim + e_n$. Selanjutnya dengan menggunakan rumus ekspansi Taylor untuk mengaproksimasi fungsi f di sekitar x_n, diperoleh

$$f(x_n) = f'(\sim)[e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + C_4e_n^4 + O(e_n^5)] \tag{2.44}$$

$$f'(x_n) = f'(\sim)[1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + 4C_4e_n^3 + O(e_n^4)] \tag{2.45}$$

dengan $C_j = \frac{1}{j!}\frac{f^{(j)}(\sim)}{f'(\sim)}$ dan $j = 1, 2, 3, \cdots$ dan $e_n = x_n - \sim$. Selanjutnya, dari persamaan (2.44) dan (2.45) diperoleh:

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\sim)\left[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + O\left(e_n^5\right)\right]}{f'(\sim)\left[1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right]}$$

$$= \frac{\left(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + O\left(e_n^5\right)\right)}{\left(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right)}$$

$$= \left(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + O\left(e_n^5\right)\right) \times \left(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right)^{-1}$$

$$= \left(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + O\left(e_n^5\right)\right) \times \left(1 - \left(2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right)\right.$$

$$\left. + 2\left(c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + O\left(e_n^3\right)\right)^2 - \ldots\right)$$

$$= (e_n - c_2e_n^2 + (-2c_3 + 2c_2^2)e_n^3 + (c_2(-3c_3 + 4c_2^2) - 3c_4 + 10c_2c_3)e_n^4 + O(e_n^5)$$

sehingga diperoleh,

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = (e_n - c_2e_n^2 + (-2c_3 + 2c_2^2)e_n^3 + (7c_2c_3 + 4c_2^3 - 3c_4)e_n^4 + O(e_n^5) \tag{2.46}$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (2.46) ke persamaan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - (e_n - c_2e_n^2 + (-2c_3 + 2c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4))$$

$$= \sim + e_n - \left(e_n - c_2e_n^2 + \left(-2c_3 + 2c_2^2\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right)$$

$$= \sim + c_2 e_n^2 + 2\left(c_3 - c_2^2\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right) \tag{2.47}$$

Dengan demikian, maka

$$f(y_n) = f(\sim + e_n)$$

$$= f(\sim) + f'(\sim)(y_n - \sim) + \frac{f''(\sim)}{2!}(y_n - \sim)^2 + O(e_n^3) \tag{2.48}$$

Karena $f(\sim) = 0$ maka dengan melakukan manipulasi aljabar pada persamaan (2.48) diperoleh

$$= f'(\sim)\left(c_2 e_n^2\right) + \frac{1}{2!} f''(\sim)\left(c_2 e_n^2\right)^2 + O(e_n^3)$$

$$= f'(\sim)\left(\left(c_2 e_n^2\right) + \frac{1}{2!}\frac{f''(\sim)\left(c_2 e_n^2\right)^2}{f'(\sim)} + \frac{O(e_n^3)}{f'(\sim)}\right)$$

$$= f'(\sim)\left[c_2 e_n^2 + \left(-2c_3 + 2c_2^2\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right] \tag{2.49}$$

Untuk persamaan

$$Af(x_n) + Bf(y_n) = A + (Ac_2 + Bc_2)e_n + (Ac_3 + B(2c_3 - 2c_2^2))e_n^2 +$$
$$(Ac_4 + B(-c_2(-3c_3 + 4c_2^2) + 3c_4 - 10c_2c_3))e_n^3 + O(e_n^4) \tag{2.50}$$

dan untuk

$$Cf(x_n) + Df(y_n) = Ce_n + (Cc_2 + Dc_2)e_n^2 + (Cc_3 + D(2c_3 - 2c_2^2))e_n^3 +$$
$$(Cc_4 + D(-c_2(-3c_2 + 4c_2^2) + 3c_4 - 10c_2c_3))e_n^4 + O(e_n^5) \tag{2.51}$$

Sehingga

$$\frac{Af(x_n) + Bf(y_n)}{Cf(x_n) + Df(y_n)} = 1 + \frac{(Cc_2 + Dc_2)e_n}{C} + \frac{(Cc_3 + D(2c_3 - 2c_2^3))e_n^2}{C} +$$
$$\frac{(Cc_4 + D(-c_2(-3c_3 + 4c_2^2) + 3c_4 - 10c_2c_3))e_n^3}{C} + O(e_n^4)$$

$$= \frac{(Cc_2 + Dc_2)e_n}{C} + \frac{(Cc_3 + D(2c_3 - 2c_2^3))e_n^2}{C} +$$

$$\frac{(Cc_4 + D(-c_2(-3c_3 + 4c_2^2) + 3c_4 - 10c_2c_3))e_n^3}{C} + O(e_n^4)$$

Maka, dengan menggunakan ekspansi deret sehingga bentuk

$$\frac{Af(x_n)+Bf(y_n)}{Cf(x_n)+Df(y_n)}=\frac{A}{C}+\frac{\left(-\frac{A(Cc_2+Dc_2)}{C}+Ac_2+Bc_2\right)e_n}{C}+\frac{1}{C}\left((A(-\frac{Cc_3+D(2c_3-2c_2^2}{C}\right)$$

$$+\frac{(Cc_2+Dc_2)^2}{C^2})-\frac{(Ac_2+Bc_2)(Cc_2+Dc_2)}{C}+Ac_3+B(2c_3-2c_2^2))e_n^2)$$

$$+\frac{1}{C}\left(\left(\begin{array}{l}(Ac_2+Bc_2)\left(-\frac{Cc_3+D(2c_3-2c_2^2)}{C}+\frac{(Cc_2+Dc_2)^2}{C^2}\right)+\\ A(\frac{Cc_4+D(-c_2(-3c_3+4c_2^2)+3c_4-10c_2c_3)}{C}+\\ \frac{2(Cc_2+Dc_2)(Cc_3+D(2c_3-2c_2^2))}{C_2})+\\ Ac_4+B(-c_4(-3c_3+4c_2^2)+3c_4-10c_2c_3)\\ -\frac{(Ac_3+B(2c_3-2c_2^2))(Cc_2+Dc_2)}{C}\end{array}\right)e_n^3\right)+O(e_n^4)$$

Selanjutnya kita masukan nilai A, B, C dan D maka didapat

$$\frac{Af(x_n)+Bf(y_n)}{Cf(x_n)+Df(y_n)}=c_2e_n+(-c_2^2+2c_3)e_n^2+(c_2(3c_3-3c_2^2)-c_2(-3c_3+4c_2^2)$$

$$+3c_4-10c_2c_3+(2c_3-2c_2^2)c_2)e_n^3+O(e_n^4) \qquad (2.52)$$

Kemudian ditambahkan 1 setelah itu subtitusikan persamann (2.52) dan (2.46) sehingga diperoleh

$$x_{n+1}=\sim-(2c_2^3-c_2c_3)e_n^4+O(e_n^5) \qquad (2.53)$$

Karena $x_{n+1}=e_{n+1}+\sim$, maka persamaan (2.53)

menjadi $e_{n+1}+\sim\;=\sim-(2c_2^3-c_2c_3)e_n^4+O(e_n^5)$

$$e_{n+1}=(2c_2^3-c_2c_3)e_n^4+O(e_n^5) \qquad (2.54)$$

Persamaan (2.54) merupakan orde konvergensi dari persamaan (2.43)

2.5 Interpolasi

Interpolasi adalah taksiran harga-harga diantara titik-titik diskrit didalam bentangan data benar-benar tepat dan pendekatannya adalah mencari kurva tunggal atau sederetan kurva yang tepat melalui titik-titik tersebut. Di dunia nyata, interpolasi dapat digunakan untuk memperkirakan suatu fungsi, yang mana fungsi tersebut tidak terdefinisi dengan suatu formula, tetapi didefinisikan hanya dengan data-data atau tabel, misalnya tabel dari hasil percobaan. Interpolasi yang akan dingunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

2.5.1 Interpolasi Linier

Misalkan diberikan dua titik $(x_n, f'(x_n))$ dan $(y_n, f'(y_n))$ kemudian misalkan polinom yang menginterpolasi kedua titik itu adalah persamaan garis lurus yang berbentuk,

$$P_1(x) = bx + c \tag{2.55}$$

Koefisian a dan b dicari dengan proses mengalihkan $(x_n, f'(x_n))$ dan $(y_n, f'(y_n))$ ke dalam persamaan (2.55), diperoleh dua persamaan linier,

$$f'(x_n) = b(x_n) + c$$

$$f'(y_n) = b(y_n) + c$$

dan dengan mengeliminasi kedua persamaan tersebut, diperoleh

$$b = \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} \tag{2.56}$$

dan

$$c = \frac{x_n f'(y_n) - y_n f'(x_n)}{x_n - y_n} \tag{2.57}$$

Subsitusikan persamaan (2.56) dan (2.57) ke dalam persamaan (2.55), maka diperoleh :

$$P_1(x) = \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} x + \frac{x_n f'(y_n) - y_n f'(x_n)}{x_n - y_n}$$

$$= \frac{xf'(y_n) - xf'(x_n) + x_n f'(y_n) - y_n f'(x_n)}{x_n - y_n}$$

$$= \frac{x_n f'(y_n) - y_n f'(y_n) + y_n f'(y_n) - y_n f'(x_n) + xf'(y_n) - xf'(x_n)}{x_n - y_n}$$

$$= \frac{(x_n - y_n) f'(y_n) + f'(x_n)(x - y_n) - f'(y_n)(x - y_n)}{x_n - y_n}$$

$$= f'(y_n) \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} (x - y_n) \tag{2.58}$$

Bentuk terakhirnya dapat diubah menjadi,

$$P_1(x) = f'(y_n) + \frac{x - y_n}{x_n - y_n} f'(x_n) - \frac{x - y_n}{x_n - y_n} f'(y_n)$$

$$= \frac{f'(y_n)(x_n - y_n) - (x - y_n) f'(y_n)}{x_n - y_n} + \frac{(x - y_n)}{x_n - y_n} f'(x_n)$$

$$= \frac{(x - x_n)}{(y_n - x_n)} f'(y_n) + \frac{(x - y_n)}{(x_n - y_n)} f'(x_n) \tag{2.59}$$

2.5.2 Interpolasi Kuadratik

Misalkan diberikan dua titik $(x_n, f'(x_n))$ dan $(y_n, f'(y_n))$ kemudian misalkan polinom yang menginterpolasi kedua titik itu adalah persamaan kuadratik yang berbentuk,

$$h(x) = ax^2 + bx + c \tag{2.60}$$

Koefisien b dan c dicari dengan proses mengalihkan $(x_n, f'(x_n))$ dan $(y_n, f'(y_n))$ ke dalam persamaan (2.60), diperoleh dua persamaan kuadratik,

$$f'(x_n) = a(x_n)^2 + b(x_n) + c$$

$$f'(y_n) = a(y_n)^2 + b(y_n) + c$$

Dengan mengeliminasi kedua persamaan tersebut, diperoleh b dan c dengan bentuk

$$b = \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} - a(x_n + y_n) \tag{2.61}$$

$$c = f'(x_n) + ax_n y_n - x_n \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} \tag{2.62}$$

Subsitusikan persamaan (2.61) dan (2.62) ke dalam persamaan (2.60), maka diperoleh :

$$\begin{aligned}
h(x) &= ax^2 + \left(\frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} - a(x_n + y_n) \right) x + f'(x_n) + ax_n y_n - x_n \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} \\
&= ax^2 - a(x_n + y_n)x + ax_n y_n + \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} x + f'(x_n) - x_n \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} \\
&= a(x - x_n)(x - y_n) + f'(x_n) + \frac{xf'(x_n) - xf'(y_n) - x_n f'(x_n) + x_n f'(y_n)}{x_n - y_n} \\
&= a(x - x_n)(x - y_n) + f'(x_n) + \frac{f'(x_n)(x - x_n) - f'(y_n)(x - x_n)}{x_n - y_n} \\
&= a(x - x_n)(x - y_n) + f'(x_n) + \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n}(x - x_n)
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Selanjutnya, bentuk terakhir dapat diubah menjadi,

$$\begin{aligned}
h(x) &= a(x - x_n)(x - y_n) + f'(x_n) + \frac{x - y_n}{x_n - y_n} f'(x_n) - \frac{x - y_n}{x_n - y_n} f'(y_n) \\
&= a(x - x_n)(x - y_n) + f'(x_n) + \frac{f'(x_n)(x - x_n) - f'(y_n)(x - x_n)}{x_n - y_n} \\
&= a(x - x_n)(x - y_n) + \frac{f'(x_n)(x_n - y_n) + f'(x_n)(x - y_n)}{x_n - y_n} + \frac{x - y_n}{y_n - x_n} f'(y_n)
\end{aligned}$$

Sehingga,

$$= a(x - x_n)(x - y_n) + \frac{(x - x_n)}{(y_n - x_n)} f'(y_n) + \frac{(x - y_n)}{(x_n - y_n)} f'(x_n) \tag{2.64}$$

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Penulisan skripsi ini menggunakan metode *research library* (penelitian kepustakaan yang bertujuan mengumpulkan data dan informasi yang dibutuhkan dalam penelitian yang berasal dari buku-buku, jurnal serta artikel yang berhubungan dengan penelitian untuk menyelesaikan permasalahan pada penelitian ini.

Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut :

1. Mendefinisikan Varian metode Chebyshev-Halley konvergensi orde empat pada persamaan (1.5), yaitu

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{f(y_n)}{f(x_n) - 2\ f(y_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{3.1}$$

   dan orde konvergensinya

$$e_{n+1} = (2c_2^3 - c_2c_3)e_n^4 + O(e_n^5) \tag{3.2}$$

2. Mendefinisikan kembali persamaan (1.5) ke dalam Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \tag{3.3}$$

3. Mendefinisikan Interpolasi Kuadratik pada persamaan $h(x) = ax^2 + bx + c$ sehingga menjadi

$$h(x) = a(x - x_n)(x - y_n) + \frac{(x - x_n)}{(y_n - x_n)} f'(y_n) + \frac{(x - y_n)}{(x_n - y_n)} f'(x_n) \tag{3.4}$$

4. Mengaprokmasikan formulasi yang akan diusulkan, kemudian asumsikan bahwa approksimasi $f'(x) \approx h(x)$, sehingga $f'(z_n)$ pada persamaan (1.1) dapat diapproksimasi dengan $h(x)$ pada persamaan (2.64).
5. Menentukaan orde konvergensi yang dihasilkan berdasarkan rumusan iterasi.
6. Membuat simulasi Numerik / perhitungan komputasi dengan menggunakan perangkat lunak Matlab untuk menentukan jumlah iterasi yang digunakan pada hampiran akar-akar fungsi.

7. Membandingkan dengan hasil penelitian lain, seperti Metode Newton, Metode Chebyshev-Halley, metode Super-Halley, Varian Super-Halley, dan Modifikasi Varian Metode Chebyshev-halley.
8. Membadingkan metode-metode yang telah disajikan menggunakan Indeks.

BAB IV
PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas bagaimana proses terbentuknaya persamaan modifikasi Varian Metode Chebyshev-Halley dengan menggunakan Interpolasi Linear dan Interepolasi Kuadratik. Selain itu, ditentukan juga orde konvergensi dari metode iterasi tersebut. Untuk mengkonfirmasi orde konvergensi dengan menggunakan perangkat lunaki MATLAB untuk menentukan COC.

4.1 Modifikasi Varian Metode Chebyshev-Halley Menggunakan Interpolasi Linier.

Varian metode Chebyshev-Halley merupakan modifikasi metode classik Chebyshev-Halley menggunakan pendekatan deret Taylor dengan mengexpansi turunan kedua yang dilakukan oleh (Yaotang Li, Peiyuan Zhang, 2009).

$$z_n = x_n - \left(1 + \frac{f(y_n)}{f(x_n) - 2 \ \ f(y_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{4.1}$$

Dengan mengambil $\quad = 1$ maka pada persamaan (4.1) menjadi

$$z_n = x_n - \left(1 + \frac{f(y_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{4.2}$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Selanjutnya, akan dikontruksi skema metode iterasi modifikasi Varian metode Chebyshev-Halley dengan definisikan kembali metode Newton dengan bentuk

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \tag{4.3}$$

Merujuk kepada (Changbum Chun, 2007) Definisikan kembali interpolasi kuadratik yang menginterpolasi titik $(x_n, f'(x_n))$ dan $(y_n, f'(y_n))$ pada persamaan $h(x) = bx + c$ sehingga menjadi

$$h(x)=\frac{(x-x_n)}{(y_n-x_n)}f'(y_n)+\frac{(x-y_n)}{(x_n-y_n)}f'(x_n) \tag{4.4}$$

Asumsikan bahwa $f'(x)\approx h(x)$, sehingga $f'(z_n)$ pada persamaan (4.4) dapat diaproksimasikan dengan $h(x)$ pada persamaan (4.4), dimana x pada $h(x)$ diganti dengan z_n sehingga menjadi

$$f'(z_n)\approx h(z_n)=\frac{(z_n-x_n)}{(y_n-x_n)}f'(y_n)+\frac{(z_n-y_n)}{(x_n-y_n)}f'(x_n) \tag{4.5}$$

Persamaan (4.5) di atas dapat dibentuk menjadi

$$f'(z_n)\approx\left(\frac{\left(x_n-\left(1+\frac{f(y_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}-x_n\right)}{\left(x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)-x_n}\right)\cdot f'(y_n)$$

$$+\left(\frac{x_n-\left(1+\frac{f(y_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}-\left(x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{x_n-\left(x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}\right)\cdot f'(x_n)$$

$$=\left(-\left(1+\frac{f(y_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\cdot-\frac{f'(x_n)}{f(x_n)}\right)\cdot f'(y_n)$$

$$+\left(-\left(1+\frac{f(y_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}+\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\cdot\frac{f'(x_n)}{f(x_n)}\right)\cdot f'(x_n)$$

$$=f'(y_n)\left(\frac{f'(y_n)f(y_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}\right)-\left(\frac{f(y_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}\right)f'(x_n)$$

maka

$$f'(z_n)\approx f'(y_n)+\left(\frac{f'(y_n)f(y_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}\right)-\left(\frac{f(y_n)f'(x_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}\right)$$

sehingga

$$f'(z_n)\approx f'(y_n)+\left(\frac{f'(y_n)-f'(x_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}\right)f(y_n) \tag{4.6}$$

Kemudian, subsitusikan persamaan (4.6) kedalam persamaan (1.1) sehingga diperoleh Varian Metode Chebyshev-Halley yang baru dengan bentuk

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(y_n) + \left(\dfrac{f'(y_n) - f'(x_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)} \right) f(y_n)} \tag{4.7}$$

dengan

$$z_n = x_n - \left(1 + \frac{f(y_n)}{f(x_n) - 2\ f(y_n)} \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Persamaan (4.7) merupakan modifikasi Varian metode Chebyshev-Halley dengan menggunakan interpolasi linear yang melibatkan 3 evaluasi fungsi yaitu $f(z_n)$, $f(y_n)$, $f(x_n)$ dan 2 evaluasi fungsi turunan $f'(y_n)$, $f'(x_n)$

Selanjutnya dibahas mengenai analisa kekonvergenan untuk mengetahui orde konvergensi dari persamaan (4.7). Berikut teorema yang memberikan persamaan tingkat kesalahan dari persamaan (4.7) yang menjukkan orde konvergensinya.

Teorema 4.1. Misalkan $\sim \in I$ adalah akar dari fungsi $f : I \rightarrow R$ untuk suatu interval terbuka *I*. Jika x_0 adalah nilai terbuka awal yang cukup dekat ke $\sim$ maka iterasi pada persamaan (4.7) memiliki persamaan *error :*

$$e_{n+1} = \left(3c_2^2 c_3^2 - 6c_2^4 c_3\right) e_n^7 + O(e_n^8)$$

dengan $e_n = x_n - \sim$ dan $C_j = \dfrac{1}{j!} \dfrac{f^{(j)}(\sim)}{f'(\sim)}, j = 1,2,3,...$

Bukti : Misalkan $\sim$ adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\sim) = 0$. Asumsikan $f'(x) = 0$ dan $x_n = \sim + e_n$, dengan menggunakan deret Taylor diperoleh :

$$f(x_n) = f'(\sim)[e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4 + O(e_n^5)] \tag{4.8}$$

$$f'(x_n) = f'(\sim)[1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + 4C_4 e_n^3 + O(e_n^4)] \tag{4.9}$$

Selanjutnya dari persamaan (4.7) dan (4.8) diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\sim)[e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4 + O(e_n^5)]}{f'(\sim)[1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + 4C_4 e_n^3 + O(e_n^4)]}$$

$$= \frac{\left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4 + O(e_n^5\right)}{\left(1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + 4C_4 e_n^3 + O(e_n^4)\right)}$$

$$= \left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4 + O(e_n^5\right) \times \left(1 - \left(2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + 4C_4 e_n^3 + O(e_n^4)\right)\right)$$

$$+ \left(2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + 4C_4 e_n^3 + O(e_n^4)\right)^2 - \ldots$$

$$= e_n - c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + (7c_2 c_3 - 3c_4 + 4c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5) \qquad (4.10)$$

Selanjutnya $f'(y_n)$ ditentukan dengan menggunakan ekspansi $f(y_n)$ disekitar ~ dari persamaan (2.47) dan (2.49) diperoleh :

$$f'(y_n) = f(\sim + e_n)$$

$$= f'(\sim) + f''(\sim)(y_n - \sim) + \frac{f'''(\sim)}{2!}(y_n - \sim)^2 + \ldots\ldots$$

$$= f'(\sim) + f''(\sim)\left(c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)\right) + \ldots\ldots$$

$$= f'(\sim)\left[1 + \frac{1}{2!}\frac{2\left(f''(\sim)\left(c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)\right)\right)}{f'(\sim)} + \ldots.\right]$$

$$= f'(\sim)\left[1 + 2c_2\left(c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)\right) + \ldots.\right]$$

$$f'(y_n) = f'(\sim)\left[1 + 2c_2^2 e_n^2 + 4(c_2 c_3 - c_2^3)e_n^3 + O(e_n^4)\right] \qquad (4.11)$$

Kemudian dengan menggunakan persamaan (4.11), (2.49), (4.8) dan persamaan (4.9) maka diperoleh :

$$\frac{f'(y_n) - f'(x_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)} = \frac{\left(-2c_2 e_n + (2c_2^2 - 3c_3)e_n^2 + (4c_2 c_3 - 4c_2^3 - 4c_4)e_n^3\right)}{\left(e_n + (c_2 - 2c_2)e_n^2 + \left(c_3 - 2\left(2c_3 - 2c_2^2\right)\right)e_n^3\right)}$$

$$= \left(-2c_2 e_n + (2c_2^2 - 3c_3)e_n^2 + (4c_2 c_3 - 4c_2^3 - 4c_4)e_n^3\right) \times$$

$$\left(e_n + (c_2 - 2c_2)e_n^2 + \left(c_3 - 2\left(2c_3 - 2c_2^2\right)\right)e_n^3\right)$$

$$= \left(-2c_2 e_n + (2c_2^2 - 3c_3)e_n^2 + (4c_2 c_3 - 4c_2^3 - 4c_4)e_n^3\right) \times$$

$$1 - \left(e_n + (c_2 - 2c_2)e_n^2 + \left(c_3 - 2\left(2c_3 - 2c_2^2\right)\right)e_n^3\right) +$$

$$\left(e_n + (c_2 - 2c_2)e_n^2 + \left(c_3 - 2\left(2c_3 - 2c_2^2\right)\right)e_n^3\right) - \ldots\ldots$$

$$= -2c_2 + \left(4c_2^2 - 4c_2^2 - 3c_3\right)e_n +$$

$$\left(-8c_2^3 + 20c_2^3 - 8^2 c_2^3 + 9c_2 c_3 - 14c_2 c_3 - 4c_4\right)e_n^2 \qquad (4.12)$$

Selanjutnya dengan mengalikan persamaan (4.12) dengan persamaan (2.49) diperoleh :

$$\frac{f'(y_n)-f'(x_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}f(y_n)=\frac{\left(-2c_2e_n+(2c_2^2-3c_3)e_n^2+(4c_2c_3-4c_2^3-4c_4)e_n^3\right)}{\left(e_n+\left(c_2-2c_2\right)e_n^2+\left(c_3-2\left(2c_3-2c_2^2\right)\right)e_n^3\right)}\times f(y_n)$$

$$=-2c_2+\left(4c_2^2-4c_2^2-3c_3\right)e_n+$$

$$\left(-8c_2^3+20c_2^3-8^2c_2^3+9c_2c_3-14c_2c_3-4c_4\right)e_n^2\times$$

$$f'(\sim)\left[c_2e_n^2+\left(-2c_3+2c_2^2\right)e_n^3\right]$$

$$=-2c_2^2e_n^2+\left(-7c_2c_3+8c_2^3-4c_2^3\right)e_n^3 \tag{4.13}$$

Sehingga, dengan menambahkan persamaan (4.11) dengan (4.13) maka diperoleh:

$$f'(y_n)+\frac{f'(y_n)-f'(x_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}f(y_n)=\left(1+2c_2^2e_n^2+(4c_2c_3-4c_2^3)e_n^3\right)+$$

$$\frac{\left(-2c_2e_n+(2c_2^2-3c_3)e_n^2+(4c_2c_3-4c_2^3-4c_4)e_n^3\right)}{\left(e_n+\left(c_2-2c_2\right)e_n^2+\left(c_3-2\left(2c_3-2c_2^2\right)\right)e_n^3\right)}\times f(y_n)$$

$$=\left(1+2c_2^2e_n^2+(4c_2c_3-4c_2^3)e_n^3\right)+$$

$$\left(-2c_2^2e_n^2+\left(-7c_2c_3+8c_2^3-4c_2^3\right)e_n^3\right)$$

$$=1+\left(4c_2^3-4c_2^3-3c_2c_3\right)e_n^3+$$

$$\left(37c_2^2c_3-8c_2^4-10c_2c_4-22c_2^2c_3+28c_2^4-6c_3^2-8^2c_2^4\right)e_n^4 \tag{4.14}$$

$$z_n=x_n+\left(1+\frac{f(y_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$=(e_n+\sim)-\left(e_n+(c_2^3-c_2c_3)e_n^4\right)$$

$$=\sim+(2c_2^3-c_2c_3)e_n^4+O(e_n^5) \tag{4.15}$$

Ekspansi deret Taylor pada $f(z_n)$ terhadap $\sim$ diberikan oleh

$$f(z_n)=z_n+c_2z_n^2+c_3z_n^3+c_3z_n^4$$

$$f(z_n)=f'(\sim)\left((2c_2^3-c_2c_3)e_n^4+c_2\left(2_2^3-c_2c_3\right)^2e_n^8\right) \tag{4.16}$$

Sehingga dengan membagi persamaan (4.16) dengan persamaan (4.14) maka diperoleh :

$$\frac{f(z_n)}{f'(y_n)+\dfrac{f'(y_n)-f'(x_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}f(y_n)}=$$

$$=\frac{f'(\sim)\left((2c_2^3-c_2c_3)e_n^4+c_2\left(2_2^3-c_2c_3\right)^2e_n^8\right)}{1+\left(4c_2^3-4c_2^3-3c_2c_3\right)e_n^3+\left(37c_2^2c_3-8c_2^4-10c_2c_4-22c_2^2c_3+28c_2^4-6c_3^2-8^2c_2^4\right)e_n^4}$$

$$=\left(f'(\sim)\left((2c_2^3-c_2c_3)e_n^4+c_2\left(2_2^3-c_2c_3\right)^2e_n^8\right)\right)\times$$

$$1+\left(4c_2^3-4c_2^3-3c_2c_3\right)e_n^3+\left(37c_2^2c_3-8c_2^4-10c_2c_4-22c_2^2c_3+28c_2^4-6c_3^2-8^2c_2^4\right)e_n^4$$

$$=\left(f'(\sim)\left((2c_2^3-c_2c_3)e_n^4+c_2\left(2_2^3-c_2c_3\right)^2e_n^8\right)\right)\times$$

$$1-\left(1+\left(4c_2^3-4c_2^3-3c_2c_3\right)e_n^3+\left(37c_2^2c_3-8c_2^4-10c_2c_4-22c_2^2c_3+28c_2^4-6c_3^2-8^2c_2^4\right)e_n^4\right)+$$

$$\left(1+\left(4c_2^3-4c_2^3-3c_2c_3\right)e_n^3+\left(37c_2^2c_3-8c_2^4-10c_2c_4-22c_2^2c_3+28c_2^4-6c_3^2-8^2c_2^4\right)e_n^4\right)^2$$

$$=\left(2c_2^3-c_2c_3\right)e_n^4+\left(10c_2^4c_3-8c_2^6+8c_2^6-3c_2^2c_3^2-4c_2^4c_3\right)e_n^7 \tag{4.17}$$

Selanjutnya dengan mengurangi z_n dengan persamaan (4.17) maka diperoleh :

$$x_{n+1}=z_n-\frac{f(z_n)}{f'(y_n)+\dfrac{f'(y_n)-f'(x_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}f(y_n)}$$

$$=\sim+\left(2c_2^3-c_2c_3\right)e_n^4$$

$$-\frac{f'(\sim)\left((2c_2^3-c_2c_3)e_n^4+c_2\left(2_2^3-c_2c_3\right)^2e_n^8\right)}{1+\left(4c_2^3-4c_2^3-3c_2c_3\right)e_n^3+\left(37c_2^2c_3-8c_2^4-10c_2c_4-22c_2^2c_3+28c_2^4-6c_3^2-8^2c_2^4\right)e_n^4}$$

$$=\sim+\left(2c_2^3-c_2c_3\right)e_n^4$$

$$+\left(2c_2^3-c_2c_3\right)e_n^4+\left(10c_2^4c_3-8c_2^6+8c_2^6-3c_2^2c_3^2-4c_2^4c_3\right)e_n^7$$

$$=\sim+\left(\left(-10c_2^4c_3+8c_2^6-8c_2^6+3c_2^2c_3^2+4c_2^4c_3\right)e_n^7\right) \tag{4.18}$$

$$x_{n+1}=\sim+\left(3c_2^2c_3^2-6c_2^4c_3\right)e_n^7+O(e_n^8)$$

Karena $x_{n+1}=e_{n+1}+\sim$, sehingga diperoleh,

$$e_{n+1}+\sim\;=\sim+\left(3c_2^2c_3^2-6c_2^4c_3\right)e_n^7+O(e_n^8)$$

$$e_{n+1}=\left(3c_2^2c_3^2-6c_2^4c_3\right)e_n^7+O(e_n^8) \tag{4.19}$$

Persamaan (4.19) merupakan konvergensi modifikasi Variant Metode Chebyshev-Halley menggunakan Interpolasi Kuadratik dan memiliki orde konvergensi tujuh.

4.2 Kuadratik

4.2.1 Modifikasi Varian Metode Chebyshev-Halley Menggunakan Interpolasi Kuadratik

Pandang kembali persamaan (1.5), kemudian definisikan kembali dalam bentuk

$$z_n = x_n + \left(1 + \frac{f(y_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Selanjutnya, akan dikontruksi skema metode iterasi modifikasi Varian metode Chebyshev-Halley dengan definisikan kembali metode Newton dengan bentuk:

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

Merujuk kepada (Changbum Chun, 2007) definisikan kembali interpolasi kuadratik yang menginterpolasi titik $(x_n, f'(x_n))$ dan $(y_n, f'(y_n))$ pada persamaan $h(x) = ax^2 + bx + c$ sehingga menjadi

$$h(x) = a(x - x_n)(x - y_n) + \frac{(x - x_n)}{(y_n - x_n)} f'(y_n) + \frac{(x - y_n)}{(x_n - y_n)} f'(x_n) \qquad (4.20)$$

Asumsikan bahwa $f'(x) \approx h(x)$, sehingga $f'(z_n)$ pada persamaan (4.3) dapat diaproksimasikan dengan $h(x)$ pada persamaan (4.20), dimana x pada $h(x)$ diganti dengan z_n sehingga menjadi

$$f'(z_n) \approx h(z_n) = a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + \frac{(z_n - x_n)}{(y_n - x_n)} f'(y_n) + \frac{(z_n - y_n)}{(x_n - y_n)} f'(x_n) \qquad (4.21)$$

Persamaan (4.21) di atas dapat dibentuk menjadi

$$f'(z_n) \approx a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + \left(\frac{\left(x_n - \left(1 + \frac{f(y_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - x_n\right)}{\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) - x_n}\right) f'(y_n)$$

$$+\left(\frac{x_n-\left(1+\dfrac{f(y_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}\right)\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}-\left(x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{x_n-\left(x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}\right)f'(x_n)$$

$$=a(z_n-x_n)(z_n-y_n)+\left(\left(1+\frac{f(y_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.\frac{f'(x_n)}{f(x_n)}\right)f'(y_n)$$

$$+\left(-\left(1+\frac{f(y_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}+\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.\frac{f'(x_n)}{f(x_n)}\right)f'(x_n)$$

$$=a(z_n-x_n)(z_n-y_n)+f'(y_n)\left(\frac{f'(y_n)f(y_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}\right)-\left(\frac{f(y_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}\right)f'(x_n)$$

maka

$$f'(z_n)\approx a(z_n-x_n)(z_n-y_n)+f'(y_n)\left(\frac{f(x_n)+2f(y_n)}{f(x_n)+2f(y_n)}\right)+f(y_n)\left(\frac{f'(y_n)-f'(x_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}\right)$$

sehingga

$$f'(z_n)\approx a(z_n-x_n)(z_n-y_n)+f'(y_n)+\left(\frac{f'(y_n)-f'(x_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}\right)f(y_n) \qquad (4.22)$$

Kemudian, subsitusikan persamaan (4.22) kedalam persamaan (4.3) sehingga diperoleh Varian Metode Chebyshev-Halley yang baru dengan bentuk

$$x_{n+1}=z_n-\frac{f(z_n)}{a(z_n-x_n)(z_n-y_n)+f'(y_n)+\left(\dfrac{f'(y_n)-f'(x_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}\right)f(y_n)} \qquad (4.23)$$

dengan

$$z_n=x_n-\left(1+\frac{f(y_n)}{f(x_n)-2\ f(y_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad y_n=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Persamaan (4.23) merupakan modifikasi Varian metode Chebyshev-Halley dengan menggunakan Interpolasi Kuadratik yang melibatkan 3 evaluasi fungsi yaitu $f(z_n)$, $f(y_n)$, $f(x_n)$ dan 2 evaluasi fungsi turunan $f'(y_n)$, $f'(x_n)$, dengan z_n didefinisikan dari persamaan (1.5) dan y_n dari persamaan (2.47), maka persamaan (4.23) dapat dibentuk tiga persamaan, yaitu :

untuk $a = 0$,

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(y_n) + \left(\frac{f'(y_n) - f'(x_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)} \right) f(y_n)} \tag{4.24}$$

untuk $a = -1$,

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + f'(y_n) + \left(\frac{f'(y_n) - f'(x_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)} \right) f(y_n)} \tag{4.25}$$

untuk $a = 1$,

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(y_n) + \left(\frac{f'(y_n) - f'(x_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)} \right) f(y_n) - a(z_n - x_n)(z_n - y_n)} \tag{4.26}$$

4.2.2 Analisa Kekonvergenan

Pada sub bab ini dibahas mengenai analisa kekonvergenan untuk mengetahui orde konvergensi dari persamaan (4.23). Berikut teorema yang memberikan persamaan tingkat kesalahan dari persamaan (4.23) yang menjukkan orde konvergensinya.

Teorema 4.2. Misalkan $\sim \in I$ adalah akar dari fungsi $f : I \to R$ untuk suatu interval terbuka *I.* Jika x_0 adalah nilai terbuka awal yang cukup dekat ke $\sim$ maka iterasi pada persamaan (4.32) memiliki persamaan *error :*

$$e_{n+1} = \left(\frac{2c_2^4 a}{f'(\sim)} - 6c_2^4 c_3 - \frac{c_2^2 c_3 a}{f'(\sim)} + 3c_2^2 c_3^2 \right) e_n^7 + O(e_n^8)$$

dengan $e_n = x_n - \sim$ dan $C_j = \frac{1}{j!} \frac{f^{(j)}(\sim)}{f'(\sim)}$, $j = 1,2,3,...$

Bukti : Misalkan $\sim$ adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\sim) = 0$. Asumsikan $f'(x) = 0$ dan $x_n = \sim + e_n$, dengan menggunakan deret Taylor diperoleh :

$$f(x_n) = f'(\sim)[e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4 + O(e_n^5)]$$

$$f^{'}(x_n) = f^{'}(\sim)[1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + 4C_4 e_n^3 + O(e_n^4)]$$

Selanjutnya dari persamaan (4.8) dan (4.9) diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\sim)[e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4 + O(e_n^5)]}{f^{'}(\sim)[1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + 4C_4 e_n^3 + O(e_n^4)]}$$

$$= \frac{\left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4 + O(e_n^5)\right)}{\left(1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + 4C_4 e_n^3 + O(e_n^4)\right)}$$

$$= \left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4 + O(e_n^5)\right) \times \left(1 - \left(2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + 4C_4 e_n^3 + O(e_n^4)\right)\right)$$

$$+ \left(2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + 4C_4 e_n^3 + O(e_n^4)\right)^2 - \ldots$$

$$= e_n - c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + (7c_2 c_3 - 3c_4 + 4c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5)$$

Selanjutnya $f'(y_n)$ ditentukan dengan menggunakan ekspansi $f(y_n)$ disekitar $\sim$ dari persamaan (2.47) dan (2.49) diperoleh :

$$f'(y_n) = f(\sim + e_n)$$

$$= f'(\sim) + f''(\sim)(y_n - \sim) + \frac{f'''(\sim)}{2!}(y_n - \sim)^2 + \ldots\ldots$$

$$= f'(\sim) + f''(\sim)\left(c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)\right) + \ldots\ldots$$

$$= f'(\sim)\left[1 + \frac{1}{2!}\frac{2\left(f''(\sim)\left(c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)\right)\right)}{f'(\sim)} + \ldots\right]$$

$$= f'(\sim)\left[1 + 2c_2\left(c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)\right) + \ldots\right]$$

$$f'(y_n) = f'(\sim)\left[1 + 2c_2^2 e_n^2 + 4(c_2 c_3 - c_2^3)e_n^3 + O(e_n^4)\right]$$

Kemudian dengan menggunakan persamaan (4.11), (2.49), (4.8) dan persamaan (4.9) maka diperoleh :

$$\frac{f'(y_n) - f'(x_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)} = \frac{\left(-2c_2 e_n + (2c_2^2 - 3c_3)e_n^2 + (4c_2 c_3 - 4c_2^3 - 4c_4)e_n^3\right)}{\left(e_n + (c_2 - 2c_2)e_n^2 + \left(c_3 - 2\left(2c_3 - 2c_2^2\right)\right)e_n^3\right)}$$

$$= \left(-2c_2 e_n + (2c_2^2 - 3c_3)e_n^2 + (4c_2 c_3 - 4c_2^3 - 4c_4)e_n^3\right) \times$$

$$\left(e_n + (c_2 - 2c_2)e_n^2 + \left(c_3 - 2\left(2c_3 - 2c_2^2\right)\right)e_n^3\right)$$

$$= \left(-2c_2 e_n + (2c_2^2 - 3c_3)e_n^2 + (4c_2 c_3 - 4c_2^3 - 4c_4)e_n^3\right) \times$$

$$1-\left(e_n+(c_2-2c_2)e_n^2+\left(c_3-2\left(2c_3-2c_2^2\right)\right)e_n^3\right)+$$

$$\left(e_n+(c_2-2c_2)e_n^2+\left(c_3-2\left(2c_3-2c_2^2\right)\right)e_n^3\right)-......$$

$$=-2c_2+\left(4c_2^2-4c_2^2-3c_3\right)e_n+$$

$$\left(-8c_2^3+20c_2^3-8^2c_2^3+9c_2c_3-14c_2c_3-4c_4\right)e_n^2$$

Selanjutnya dengan mengalikan persamaan (4.12) dengan persamaan (2.49) diperoleh :

$$\frac{f'(y_n)-f'(x_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}f(y_n)=\frac{\left(-2c_2e_n+(2c_2^2-3c_3)e_n^2+(4c_2c_3-4c_2^3-4c_4)e_n^3\right)}{\left(e_n+(c_2-2c_2)e_n^2+\left(c_3-2\left(2c_3-2c_2^2\right)\right)e_n^3\right)}\times f(y_n)$$

$$=-2c_2+\left(4c_2^2-4c_2^2-3c_3\right)e_n+$$

$$\left(-8c_2^3+20c_2^3-8^2c_2^3+9c_2c_3-14c_2c_3-4c_4\right)e_n^2\times$$

$$f'(\sim)\left[c_2e_n^2+\left(-2c_3+2c_2^2\right)e_n^3\right]$$

$$=-2c_2^2e_n^2+\left(-7c_2c_3+8c_2^3-4c_2^3\right)e_n^3$$

Dengan menambahkan persamaan (4.11) dengan (4.13) maka diperoleh:

$$f'(y_n)+\frac{f'(y_n)-f'(x_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}f(y_n)=\left(1+2c_2^2e_n^2+(4c_2c_3-4c_2^3)e_n^3\right)+$$

$$\frac{\left(-2c_2e_n+(2c_2^2-3c_3)e_n^2+(4c_2c_3-4c_2^3-4c_4)e_n^3\right)}{\left(e_n+(c_2-2c_2)e_n^2+\left(c_3-2\left(2c_3-2c_2^2\right)\right)e_n^3\right)}\times f(y_n)$$

$$=\left(1+2c_2^2e_n^2+(4c_2c_3-4c_2^3)e_n^3\right)+$$

$$\left(-2c_2^2e_n^2+\left(-7c_2c_3+8c_2^3-4c_2^3\right)e_n^3\right)$$

$$=1+\left(4c_2^3-4c_2^3-3c_2c_3\right)e_n^3+$$

$$\left(37c_2^2c_3-8c_2^4-10c_2c_4-22c_2^2c_3+28c_2^4-6c_3^2-8^2c_2^4\right)e_n^4$$

$$z_n=x_n+\left(1+\frac{f(y_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$=(e_n+\sim)-\left(e_n+(c_2^3-c_2c_3)e_n^4\right)$$

$$=\sim+(2c_2^3-c_2c_3)e_n^4+O(e_n^5)$$

Ekspansi deret Taylor pada $f(z_n)$ terhadap $\sim$ diberikan oleh

$$f(z_n)=z_n+c_2z_n^2+c_3z_n^3+c_3z_n^4$$

$$f(z_n) = f'(\sim)\left((2c_2^3 - c_2c_3)e_n^4 + c_2\left(2_2^3 - c_2c_3\right)^2 e_n^8\right)$$

Berdasarkan persamaan (4.15) dan persamaan (2.47) diperoleh :

$$z_n - x_n = -e_n + c_2c_3e_n^4 + O(e_n^5) \tag{4.27}$$

$$z_n - y_n = -c_2e_n^2 + 2(c_2^2 - 3c_3)e_n^4 + O(e_n^5) \tag{4.28}$$

$$a(z_n - x_n)(z_n - y_n) = a\left(-e_n + c_2c_3e_n^4 + O(e_n^5)\right) - c_2e_n^2 + 2(c_2^2 - 3c_3)e_n^4$$

$$= ac_2e_n^3 + O(e_n^4) \tag{4.29}$$

Dengan menambahkan persamaan (4.29) dengan (4.14) maka diperoleh :

$$a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + f'(y_n) + \frac{f'(y_n) - f'(x_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)} f(y_n) =$$

$$= \left(ac_2e_n^3\right) + \left(1 + \left(4c_2^3 - 4c_2^3 - 3c_2c_3\right)e_n^3\right) +$$

$$\left(37c_2^2c_3 - 8c_2^4 - 10c_2c_4 - 22c_2^2c_3 + 28c_2^4 - 6c_3^2 - 8^2c_2^4\right)e_n^4 \tag{4.30}$$

Dengan membagi persamaan (4.16) dengan persamaan (4.30) maka diperoleh :

$$\frac{f(z_n)}{a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + f'(y_n) + \frac{f'(y_n) - f'(x_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)} f(y_n)} =$$

$$= \frac{f'(\sim)\left((2c_2^3 - c_2c_3)e_n^4 + c_2\left(2_2^3 - c_2c_3\right)^2 e_n^8\right)}{ac_2e_n^3 + \left(1 + \left(4c_2^3 - 4c_2^3 - 3c_2c_3\right)e_n^3 + \left(37c_2^2c_3 - 8c_2^4 - 10c_2c_4 - 22c_2^2c_3 + 28c_2^4 - 6c_3^2 - 8^2c_2^4\right)e_n^4\right)}$$

$$= \frac{f'(\sim)\left((2c_2^3 - c_2c_3)e_n^4 + c_2\left(2_2^3 - c_2c_3\right)^2 e_n^8\right)}{1 + \left(ac - 3_2c_3 + 4_2^3 - 4c_2^3\right) + \left(\left(37c_2^2c_3 - 8c_2^4 - 10c_2c_4 - 22c_2^2c_3 + 28c_2^4 - 6c_3^2 - 8^2c_2^4\right)e_n^4\right)}$$

$$= f'(\sim)\left((2c_2^3 - c_2c_3)e_n^4 + c_2\left(2_2^3 - c_2c_3\right)^2 e_n^8\right) \quad \times$$

$$1 + \left(ac - 3_2c_3 + 4_2^3 - 4c_2^3\right) + \left(\left(37c_2^2c_3 - 8c_2^4 - 10c_2c_4 - 22c_2^2c_3 + 28c_2^4 - 6c_3^2 - 8^2c_2^4\right)e_n^4\right)$$

$$= f'(\sim)\left((2c_2^3 - c_2c_3)e_n^4 + c_2\left(2_2^3 - c_2c_3\right)^2 e_n^8\right) \quad \times$$

$$1 - \left(1 + \left(ac - 3_2c_3 + 4_2^3 - 4c_2^3\right) + \left(\left(37c_2^2c_3 - 8c_2^4 - 10c_2c_4 - 22c_2^2c_3 + 28c_2^4 - 6c_3^2 - 8^2c_2^4\right)e_n^4\right)\right)$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 + \left(ac - 3_2c_3 + 4_2^3 - 4c_2^3\right) + \\ \left(\left(37c_2^2c_3 - 8c_2^4 - 10c_2c_4 - 22c_2^2c_3 + 28c_2^4 - 6c_3^2 - 8^2c_2^4\right)e_n^4\right) \end{pmatrix}^2 - \ldots\ldots.$$

$$= \left(2c_2^3 - c_2c_3\right)e_n^4 + \left(-2c_2^4a + 10c_2^4c_3 - 8c_2^6 + 8c_2^6 + c_2^2c_3a - 3c_2^3c_3^2 - 4_2^4c_3\right)e_n^7 + O(e_n^8) \tag{4.31}$$

Selanjutnya dengan mengurangi z_n dengan persamaan (4.31) maka diperoleh :

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + f'(y_n) + \dfrac{f'(y_n) - f'(x_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)} f(y_n)}$$

$$= \sim + (2c_2^3 - c_2c_3)e_n^4 -$$

$$\frac{f'(\sim)\left((2c_2^3 - c_2c_3)e_n^4 + c_2\left(2_2^3 - c_2c_3\right)^2 e_n^8\right)}{\left(ac_2e_n^3\right) + \left(1 + \left(4c_2^3 - 4c_2^3 - 3c_2c_3\right)e_n^3 + \left(37c_2^2c_3 - 8c_2^4 - 10c_2c_4 - 22c_2^2c_3 + 28c_2^4 - 6c_3^2 - 8^2c_2^4\right)e_n^4\right)}$$

$$= \sim + (2c_2^3 - c_2c_3)e_n^4 -$$

$$\left(2c_2^3 - c_2c_3\right)e_n^4 + \left(-2c_2^4a + 10c_2^4c_3 - 8c_2^6 + 8c_2^6 + c_2^2c_3a - 3c_2^3c_3^2 - 4_2^4c_3\right)e_n^7$$

$$= \sim + \left(2c_2^4a - 10c_2^4c_3 + 8c_2^6 - 8c_2^6 - c_2^2c_3a + 3c_2^3c_3^2 + 4_2^4c_3\right)e_n^7 \qquad (4.32)$$

$$= \sim + \left(2c_2^4a - 6c_2^4c_3 - c_2^2c_3a + 3c_2^2c_3^2\right)e_n^7$$

Oleh karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \sim$, maka diperoleh,

$$e_{n+1} + \sim = \sim + \left(2c_2^4a - 6c_2^4c_3 - c_2^2c_3a + 3c_2^2c_3^2\right)e_n^7$$

$$e_{n+1} = \left(2c_2^4a - 6c_2^4c_3 - c_2^2c_3a + 3c_2^2c_3^2\right)e_n^7 + O(e_n^8) \qquad (4.33)$$

Sehingga berdasarkan analisa konvergensi persamaan (4.23) memiliki orde konvergensi ketujuh yang merupakan konvergensi modifikasi Variant Metode Chebyshev-Halley menggunakan Interpolasi Kuadratik.

4.3 Simulasi Numerik

Pada sub bab ini, akan diberikan simulasi numerik menggunakan *software* Matlab versi 7.0.4 dengan digit $e = 10^{-16}$ untuk persamaan (4.23) yang bertujuan untuk menunjukkan keefektivan persamaan (4.23) tersebut. Selain itu, persamaan (4.23) akan dibandingkan jumlah jumlah iterasi beberapa metode iteratif dalam menghampiri akar persamaan. Fungsi-fungsi yang dingunakan adalah sebagai berikut:

$f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ $\qquad \sim \approx 1.3652300134140968$

$f_2(x) = \sin^2 x - x^2 + 1$ $\qquad \sim \approx 1.4044916482153412$

$f_3(x) = x^2 - e^x - 3x + 2$ $\qquad \sim \approx 0.2575302854398607$

$f_4(x) = (\cos x - x)$ $\sim \approx 0.7390851332151606$

$f_5(x) = (x-1)^3 - 1$ $\sim \approx 2.0000000000000000$

$f_6(x) = xe^{x^2} - \sin^2 x + 3\cos x + 5$ $\sim \approx -1.2076478271309189$

$f_7(x) = (x+2)e^x - 1$ $\sim \approx -0.4428544010023885$

Berdasarkan hasil perhitungan komputasi atau simulasi numerik diperoleh jumlah iterasi dari berbagai metode seperti : NM dinotasikan sebagai metode Newton dengan orde konvergensi dua, CM dinotasikan sebagai metode Chebyshev dengan orde konvergensi tiga oleh Yaotang Li (2009), SHM dinotasikan sebagai metode Super-Halley dengan orde konvergensi tiga oleh Yaotang Li (2009), VM1 dinotasikan sebagai Varian metode Chebyshev_Halley dan VCHM1 dinotasikan sebagai metode pada persamaan (4.24), VCHM2 dinotasikan sebagai metode pada persamaan (4.25), VCHM3 dinotasikan sebagai metode pada persamaan (4.26) dengan orde konvergensi tujuh.

Tabel 4.1. Perbandingan Jumlah Iterasi

$f(x)$	x_0	Jumlah Iterasi						
		NW	CM	SHM	VM1	VCHM1	VCHM2	VCHM3
$f_1(x)$	-0.3	54	50	32	43	27	Ttd	48
	-0.5	131	8	14	14	18	3	30
$f_2(x)$	1	7	16	3	3	3	3	3
	5	8	5	5	5	3	3	4
$f_3(x)$	4.5	8	5	4	4	4	4	4
	7	9	7	5	5	5	5	5
$f_4(x)$	2.4	5	3	3	3	2	3	2
	7	27	4	14	28	4	5	11
$f_5(x)$	0.2	26	9	8	8	4	4	7
	3.5	7	5	4	4	3	3	3
$f_6(x)$	-0.5	11	Ttd	4	4	3	4	4
	-2.5	12	8	6	6	5	5	6
$f_7(x)$	2	8	6	4	4	4	4	4
	4	11	8	5	5	5	5	5

Berdasarkan Tabel 4.1 mengambarkan perbandingan jumlah iterasi dari berbagai metode dengan menggunakan beberapa fungsi dan nilai awal yang berbeda, dimana secara umum Tabel 4.1 menunjukkan bahwa metode iterasi dengan orde yang lebih tinggi memiliki jumlah iterasi yang lebih sedikit dibandingkan metode iterasi yang mempunyai orde konvergensi lebih rendah. Akan tetapi, pada beberapa fungsi ada yang menunjukkan orde yang lebih tinggi memiliki iterasi yang lebih banyak dibandingkan metode iterasi yang orde konvergensi yang lebih rendah, seperti pada $f_4(x)$ dengan nilai awal 7, VM1 dengan orde konvergensi empat memiliki iterasi yang lebih banyak dibandingkan NW yang memiliki orde konvergensi kedua. Selain itu, pada $f_1(x)$ dengan nilai awal -0.5, VCHM3 dengan orde konvergensi ketujuh memiliki iterasi lebih banyak dibandingkan VM1 yang memiliki orde konvergensi keempat. Hal ini bisa terjadi karena setiap metode memiliki cara tersendiri dalam menghampiri akar sebuah fungsi tergantung pada bentuk persamaan serta fungsi yang diberikan dan nilai awal yang diberikan pada fungsi itu.

Selain menggunakan iterasi, kekonvergenan juga dapat diliat dengan menggunakan *Computational Order of Convergence* (COC), yakni perhitungan orde konvergensi secara numerik.

Tabel 4.2. Perbandingan Nilai COC

$f(x)$	x_0	COC						
		NW	CM	SHM	VM1	VCHM1	VCHM2	VCHM3
$f_1(x)$	-0.3	2.03	2.88	3.73	4.07	3.42	Ttd	4.73
	-.05	1.99	2.85	3.98	3.98	8.21	Ttd	3.67
$f_2(x)$	1	1.99	2.85	Ttd	Ttd	6.99	7.00	7.00
	5	1.99	2.94	4.05	4.05	6.99	6.99	6.99
$f_3(x)$	4.5	1.88	2.89	3.91	3.91	4.18	10	10.91
	7	2.00	3.03	4.03	4.03	9.30	2.50	8.25
$f_4(x)$	2.4	1.99	2.84	3.83	3.83	6.99	6.99	6.99
	7	1.99	3.02	3.88	4.00	7.00	7.00	10.91
$f_5(x)$	0.2	2.00	2.97	3.76	3.76	8.40	9.63	5.45
	3.5	1.99	2.95	3.90	3.90	Ttd	Ttd	Ttd
$f_6(x)$	-0.5	2.00	Ttd	3.66	3.66	1.85	Ttd	Ttd
	-2.5	2.00	2.99	4.04	4.04	7.04	7.04	7.03
$f7(x)$	2	1.99	2.97	3.84	3.84	6.99	6.99	6.99
	4	2.00	2.99	3.84	3.84	6.99	7.05	6.99

Tabel 4.2 menunjukkan bahwa orde konvergensi pada setiap metode berbeda-beda. Hal ini dapat terjadi akibat fungsi serta nilai awal yang diberikan pada setiap metode. Namun, secara umum hasil perhitungan orde konvergensi secara numerik (COC) metode iterasi yang memiliki orde konvergensi yang lebih tinggi secara teori menunjukkan nilai COC lebih tinggi dibandingkan metode iterasi yang memiliki orde konvergensi lyang lebih rendah.

Berdasarkan Tabel 4.1 dan Tabel 4.2 akan menunjukkan tentang keefektifan persamaan orde konvergensi dalam menyelesaikan persamaan nonlinear untuk menghampiri akar-akar persamaannya.

Tabel 4.3. Perbandingan Indeks

Metode	Orde Konvergensi	Indeks
NW	2	1.414
CM	3	1.316
SHM	3	1.316
VM1	4	1.587
VCHM	7	1.475

Tabel 4.3 menggambarkan perbandingan indeks secara numerik. Tabel 4.3 menunjukkan bahwa nilai indeks untuk modifikasi Varian metode Chebyshev-Halley menggunakan Interpolasi Kuadratik (VCHM) lebih besar dibandingkan dengan metode newton, maka metode ini lebih efektif dalam menyelesaikan persamaan nonlinear.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Varian Metode Chebyshev-Halley memiliki orde konvergensi ke-empat, setelah Varian Metode Chebyshev-Halley dimodifikasi menggunakan Interpolasi Kuadratik, maka diperoleh persamaan baru pada persamaan (4.26) dengan bentuk:

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + f'(y_n) + \left(\dfrac{f'(y_n) - f'(x_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)}\right) f(y_n)}$$

dengan

$$z_n = x_n + \left(1 + \frac{f(y_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

dan persamaan errornya sebagai berikut:

$$e_{n+1} = \left(\frac{2c_2^4 a}{f'(\sim)} - 6c_2^4 c_3 - \frac{c_2^2 c_3 a}{f'(\sim)} + 3c_2^2 c_3^2\right) e_n^7 + O(e_n^8)$$

yang merupakan orde konvergensi enam. Selanjutnya dengan mengambil $a = 0$, $a = -1$ dan $a = 1$ diperoleh tiga persamaan baru dengan bentuk:

VCHM1 dengan $a = 0$;

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(y_n) + \left(\dfrac{f'(y_n) - f'(x_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)}\right) f(y_n)}$$

VCHM2 dengan $a = -1$;

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + f'(y_n) + \left(\dfrac{f'(y_n) - f'(x_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)}\right) f(y_n)}$$

VCHM3 dengan $a = -1$;

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(y_n) + \left(\frac{f'(y_n) - f'(x_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)}\right) f(y_n) - a(z_n - x_n)(z_n - y_n)}$$

Berdasarkan hasil simulasi numerik pada Tabel 4.1, Tabel 4.2 VCHM secara umum memiliki iterasi yang lebih sedikit dan nilai COC yang lebih tinggi dibanding metode iterasi Newton dan metode lain nya. Dan berdasarkan Tabel 4.3 indeks VCHM lebih efektif dalam menyelesaikan persamaan nonlinear.

5.2 Saran

Tugas akhir ini, penulis diilhami dari proses yang dilakukan oleh Changbum Chung (2007) yang memodifikasi metode jarrat menggunakan interpolasi kuadratik. Pada skripsi ini, penulis menggunakan COC *(Computational Order of Convergence)* dalam memperlihatkan orde konvergensi secara numerik dan penulis juga menggunakan *Efficiency index* (Manoj Kumar Singh, 2009) dalam memperlihatkan keefektifan persamaan orde konvergensinya. Oleh sebab itu, disarankan pada pembaca untuk meneliti lalnjut dalam memperlihatkan orde konvergensi secara numerik dengan menggunakan ACOC *(Approximated Computational Order of Convergence)* dan ECOC *(Extrapolated Computational Order of Convergence)* .

DAFTAR PUSTAKA

Chapra Steven, C., Raymond P. Canale, *Numerical Methods for Engineers, fifth edition*, MC Graw Hill, Singapura, 2006

Chun, Changbum, *"Some Improvement of Jarrat's Method with Sixth-order Convergence"*. Applied Mathematics and Computation. Vol. 190, halaman 1432-1437, 2007

Changbum Chun and Beny Neta, *"Some modifikasi of Newton's method by the method of undetermined coefficient"s*, Comput. Math.Appl.56, 2008, pp. 2528-2538

JR, Frank Ayres & Elliot Mendelson, *Kalkulus Edisi Keempat*, Erlangga, Jakarta, 2004.

Kou Jisheng, Li Yitian and Wang Xiuhua, *"Fourth-order iterative methods free second derivative"*. Appl. Math. Comput.183 (2007) 880-885

Mathews, John H., *Numerical Methods for Mathematics Science and Engineering, Second Edition*, Prentice-Hall International,Inc, United States of America.1992

M.Heydari,S.H. Hosseini, G.B. Loghmani, *"Convergence of a Family of Third-order Methods Free from Second Derivatives for Finding Multiple Roots of Nonlinear Equtions"*. World App Sciences 11 (5): (2010) 507-512

Lingling Zhao, Xia Wang, Weihua Guo, *"New Families of Eighth-Order Methods With High Efficiency Index For Solving Nonlinear Equations"*. Issue4, Volume 4, April 2012.

Purcell, Edwin J., Dale Varberg., Steven E. Rigdon, *Kalkulus Edisi Kedelapan. Jilid 2*, Erlangga, Jakarta. 2004

Smith, Robert T. & Roland B. Minton, *CalculusSecond Edition*, MC Graw Hill, New York, 2002.

Yaotang Li, Peiyuan Zhang and Yanyan Li, *"Some New Variants of Chebyshev-Halley Method Freefrom Second Derivative"* Vol.9 No.2, pp.201-206 (2010)